Umjetna inteligencija

Modeliranje neizvjesnosti

Marko Čupić

Copyright © 2022. Marko Čupić, v0.2

IZDAVAČ

JAVNO DOSTUPNO NA WEB STRANICI JAVA.ZEMRIS.FER.HR/NASTAVA/UI

Ovo je popratni materijal za kolegij Umjetna inteligencija na Fakultetu elektrotehnike i računarstva Sveučilišta u Zagrebu. Tekst je usklađen s prezentacijama koje se koriste na tom kolegiju i okvirno ih prati. Uz tekst je pripremljena dodatna biblioteka napisana u programskom jeziku Java koja ilustrira algoritme koji se obrađuju u tekstu. Čitatelj se upućuje da istu skine i prati te pokreće primjere o koji se obrađuju u tekstu.

Licensed under the Creative Commons Attribution-NonCommercial 3.0 Unported License (the "License"). You may not use this file except in compliance with the License. You may obtain a copy of the License at `http://creativecommons.org/licenses/by-nc/3.0`. Unless required by applicable law or agreed to in writing, software distributed under the License is distributed on an "AS IS" BASIS, WITHOUT WARRANTIES OR CONDITIONS OF ANY KIND, either express or implied. See the License for the specific language governing permissions and limitations under the License.

Prvo izdanje, svibanj 2022.

Sadržaj

1 Uvod 5

2 Bayesova shema i teorija vjerojatnosti 7

2.1 Podsjetnik na teoriju vjerojatnosti 7

2.1.1 Nezavisni događaji 11

2.1.2 Uvjetna vjerojatnost 13

2.1.3 Zakon ulančavanja 15

2.2 Bayesova shema u produkcijskim sustavima 15

2.2.1 Primjer 1 17

2.2.2 Primjer 2 18

2.3 Problem Monty Hall 20

2.3.1 Objašenjenje problema Monty Hall na intuitivan način 23

2.3.2 Objašenjenje problema Monty Hall preko Bayesovog teorema 24

3 Neizraziti skupovi i neizrazita logika 29

3.1 Neizraziti skupovi 29

3.2 Jezična varijabla 32

3.3 Jezični modifikatori 33

3.4 Povezanost teorije neizrazitih skupova i neizrazite logike 35

3.5 Operacije nad neizrazitim skupovima 36

3.5.1 Razlika između klasične i teorije neizrazitih skupova 38

3.6 Zaključivanje u neizrazitoj logici 40

Bibliografija 45

Knjige 45

Članci 45
Konferencijski radovi i ostalo 45

1. Uvod

Kada smo započeli priču o umjetnoj inteligenciji, zaključili smo da nas u praksi zanima stvaranje računalnih sustava koji za nas obavljaju zadatke i to na nama koristan način. Da bi to bilo ostvarivo, naši će se sustavi često susretati s informacijama koje su u nekom smislu neizvjesne. Ova se neizvjesnost može javljati u različitim pojavnim oblicima, pa pogledajmo dva primjera.

Primjer 1. Gradimo tehnički sustav koji redovito dobiva očitanja sa senzora. Međutim, poznato nam je da zbog određenih razloga senzori mogu generirati "lažna" očitanja - dojaviti nam da su registrirali neki događaj, a taj se u stvarnosti nije dogodio (ili obrnuto). Da bismo napravili robustan sustav, u ovakvom scenariju bit će nam interesantno događajima pridjeljivati vjerojatnosti, te potom odluke donositi na temelju provjere koje su nam hipoteze (što se stvarno dogodilo) najvjerojatnije, u situaciji kada imamo mnoštvo mogućih događaja te njihov vjerojatnosni opis.

Primjer 2. Gradimo tehnički sustav koji upravlja otvaranjem brane akumulacijskog jezera. Sustav mjeri brzinu porasta vodostaja, visinu razine vode i jakost padanja kiše te treba regulirati otvor brane, kako ne bi došlo do preplavljivanja. Pravila na temelju kojih se upravlja mogu biti oblika: *ako je brzina porasta vodostaja umjerena i visina razine vode visoka, onda otvor brane treba biti velik*. Za ulazne varijable imat ćemo senzore koji nam mogu dojaviti da je razina vode primjerice 512 cm. I sada se postavlja pitanje: je li ta razina *visoka*? Uz pretpostavku da je visina brane 6 metara, složit ćemo se da visina vode od 10 cm nije visoka. Možda ćemo se složiti i da visina od 550 cm jest visoka. A što je s visinom od 549 cm? 548 cm? 520 cm? U ovom slučaju, "tvrdo" djelovanje ispitnih predikata (*jest "visoka" ako je visina veća ili jednaka nekom pragu, inače apsolutno nije*) nam zapravo ne odgovara. Umjesto toga, htjeli bismo omogućiti da nam ispitni predikati vraćaju mjeru u kojoj je izmjerena vrijednost kompatibilna sa značenjem odnosno s konceptom koji taj predikat predstavlja.

Uz dane primjere, naši se tehnički sustavi mogu susretati s nizom drugih problema: neki nam podatci mogu biti nedostupni, neki podatci mogu biti neprecizni ili ih generira senzor koji je nepouzdan pa trebamo uzeti u obzir činjenicu da je prava vrijednost negdje u okolici one koju smo dobili i slično.

Stoga naši algoritmi koje ćemo implementirati u takvim sustavima trebaju na odgovarajući način ugraditi neizvjesnost te znati:

1. kako predstaviti podatke koji imaju određen aspekt neizvjesnosti,
2. kako kombinirati takve podatke te
3. kako izvoditi zaključke na temelju takvih podataka.

Spomenuti izazovi nisu ništa novo - ljudi se s njima bore odavno te je do danas razvijen niz alata i tehnika koje omogućavaju izgradnju tehničkih sustava sposobnih raditi u takvom okruženju. U okviru ovog teksta, mi ćemo razmotriti dva danas vrlo rasprostranjena pristupa:

1. teoriju vjerojatnosti odnosno Bayesovu shemu te
2. neizrazite skupove i neizrazitu logiku.

2. Bayesova shema i teorija vjerojatnosti

Bayesova shema predstavlja način modeliranja neizvjesnosti koji je temeljen na teoriji vjerojatnosti. Stoga ćemo se najprije podsjetiti osnova teorije vjerojatnosti.

2.1 Podsjetnik na teoriju vjerojatnosti

Kada razmišljamo o vjerojatnostima, i što iste zapravo znače, često razmišljamo o eksperimentu čiji je ishod slučajan. Primjeri takvih eksperimenata su bacanje novčića (zanima nas hoće li rezultat biti glava ili pismo), bacanje šesterostrane kocke (zanima nas hoćemo li dobiti broj 1, 2, 3, 4, 5 ili 6), izvlačenje "na slijepo" kuglice iz kutije u koju je ubačeno 36 kuglica pri čemu na svakoj piše jedan broj od 0 do 35 i nema dvije kuglice s istim brojem (zanima nas koji ćemo broj izvući) i slično.

Slučajni događaj u tom je kontekstu događaj koji se može ili ne mora dogoditi (primjerice, rezultat bacanja novčića je glava, kocka je pala na broj manji ili jednak 3, izvučena je kuglica s brojem 17, izvučena je kuglica s parnim brojem). *Elementarni događaji* su svi mogući ishodi eksperimenta: u kontekstu bacanja novčića, to bi bio dvočlani skup {glava, pismo}, u kontekstu bacanja kocke šesteročlani skup brojeva {1, 2, 3, 4, 5, 6}, a u kontekstu izvlačenja kuglica trideset i šesteročlani skup {0, 1, 2, …, 34, 35}. Skup svih mogućih ishoda eksperimenta (odnosno skup svih elementarnih događaja) nazivamo *prostor elementarnih događaja* (u engleskoj terminologiji najčešće engl. *Sample space*) i taj ćemo skup označiti slovom S. Stoga imamo:

$$S_{\text{novčić}} = \{\text{glava}, \text{pismo}\},$$

$$S_{\text{kocka}} = \{1,2,3,4,5,6\},$$

$$S_{\text{kuglice}} = \{0,1,2,\ldots,34,35\}.$$

U slučaju bacanja dva novčića, elementarni događaj opisali bismo uređenim parom koji bi se sastojao od rezultata bacanja prvog novčića te rezultata bacanja drugog novčića pa bi skup elementarnih događaja imao 4 elementa:

$$S_{\text{dva novčića}} = \{(\text{glava}, \text{glava}), (\text{glava}, \text{pismo}), (\text{pismo}, \text{glava}), (\text{pismo}, \text{pismo})\},$$

a bacamo li kocku dva puta, elementarni bi događaj opisali uređenim parom koji bi se sastojao od broja koji smo dobili prvim bacanjem te broja koji smo dobili drugim bacanjem pa bi skup elementarnih događaja imao 36 elemenata:

$$S_{\text{dvije kocke}} = \{(1,1),(1,2),\ldots,(2,1),(2,2),\ldots(6,5),(6,6)\}.$$

Svaki podskup skupa elementarnih događaja nazivamo *događajem* (engl. *event*). Tako skup $S_{\text{novčić}}$ ima četiri podskupa: $\emptyset$ (prazan skup), $\{\text{glava}\}$, $\{\text{pismo}\}$ te , $\{\text{glava}, \text{pismo}\}$. Prvi skup bi opisivao događaj "novčić nije bačen", drugi "dobili smo glavu", treći "dobili smo pismo", a četvrti "novčić je bačen" (čime je jasno da smo dobili glavu ili pismo, no ne zanima nas što).

Kod bacanja kocke mogli bismo definirati mnoštvo događaja, uključivo 6 događaja koji odgovaraju "dobili smo broj i", događaj "dobili smo paran broj" (pridruženi skup bio bi $\{2,4,6\}$), "dobili smo neparan broj" (pridruženi skup bio bi $\{1,3,5\}$), "dobili smo prost broj" (pridruženi skup bio bi $\{2,3,5\}$), "dobili smo broj manji od 4" (pridruženi skup bio bi $\{1,2,3\}$), i tako dalje.

Za neki događaj E kažemo da se dogodio, ako pridruženi skup sadrži elementarni događaj koji je rezultat provedenog slučajnog eksperimenta. Primjerice, bacimo li kocku i dobijemo broj 2, od prethodno navedenih događaja dogodili su se "dobili smo broj 2", "dobili smo paran broj", "dobili smo prost broj", "dobili smo broj manji od 4", a nisu se dogodili događaji "dobili smo broj 1", "dobili smo broj 3", "dobili smo broj 4", "dobili smo broj 5", "dobili smo broj 6", "dobili smo neparan broj".

Imamo li dva događaja E_1 i E_2 nad skupom elementarnih događaja S, možemo definirati:

- događaj $E_1 \cup E_2$ koji se događa svaki puta kada je rezultat eksperimenta elementarni događaj koji je bilo u skup događaja E_1, bilo u skupu događaja E_2 (drugim riječima, događa se kad se dogodi ili E_1 ili E_2 (ili oba),
- događaj $E_1 \cap E_2$ koji se događa svaki puta kada je rezultat eksperimenta elementarni događaj koji je i u skupu događaja E_1 i u skupu događaja E_2 (drugim riječima, događa se samo kad se dogodi i E_1 i E_2 istovremeno.

Dva događaja E_1 i E_2 su međusobno isključiva ako je događaj $E_1 \cap E_2$ opisan praznim skupom (drugim riječima, ne dijele niti jedan elementarni događaj). Primjer takvih događaja su "dobili smo paran broj" i "dobili smo neparan broj".

Komplementaran događaj događaju E označit ćemo s E^c i definirati kao događaj čiji pridruženi skup čine svi elementarni događaji iz S koji nisu u skupu događaja E. Primijetite u našem primjeru da je komplementarni događaj događaja "dobili smo paran broj" događaj "dobili smo neparan broj", komplementarni događaj događaja "dobili smo glavu" bilo bi događaj "dobili smo pismo", itd.

Sada možemo definirati i vjerojatnost nekog događaja.

Definicija 2.1 — Vjerojatnost događaja.
Neka je S skup elementarnih događaja, E neki događaj definiran nad S. *Vjerojatnost događaja* E, oznaka $P(E)$, je broj koji zadovoljava sljedeća svojstva:

1. $0 \leq P(E) \leq 1$
2. $P(S) = 1$

Za svaki niz međusobno isključivih događaja $E_1, E_2, \ldots$, mora vrijediti:

$$P(\bigcup_i E_i) = \sum_i P(E_i)$$

Pogledajmo primjer. Pretpostavimo da je kocka koju bacamo takva da je vjerojatnost dobivanja

svakog od brojeva jednaka (označimo je s p); možemo pisati:

$$P(1) = p$$
$$P(2) = p$$
$$P(3) = p$$
$$P(4) = p$$
$$P(5) = p$$
$$P(6) = p.$$

Prema (2) iz prethodnog teorema mora vrijediti $P(\{1,2,3,4,5,6\}) = 1$ što možemo zapisati i kao $P(\{1\} \cup \{2\} \cup \{3\} \cup \{4\} \cup \{5\} \cup \{6\}) = 1$, a kako su ovi događaji međusobno isključivi, po istom teoremu slijedi:

$$\begin{aligned} P(\{1\}) + P(\{2\}) + P(\{3\}) + P(\{4\}) + P(\{5\}) + P(\{6\}) &= 1 \\ p + p + p + p + p &= 1 \\ 6 \cdot p &= 1 \\ p &= \frac{1}{6} \end{aligned}$$

odnosno:

$$P(1) = P(2) = P(3) = P(4) = P(5) = P(6) = \frac{1}{6}$$

što je u skladu s očekivanim.

Primjetimo također da su događaji E i E^c uvijek međusobno isključivi pa je $P(E \cup E^c) = P(E) + P(E^c)$. S druge strane, $E \cup E^c = S$, pa je $P(E \cup E^c) = P(S) = 1$, čime imamo $P(E) + P(E^c) = 1$ odnosno:

$$P(E^c) = 1 - P(E).$$

Napravimo još jedan primjer.

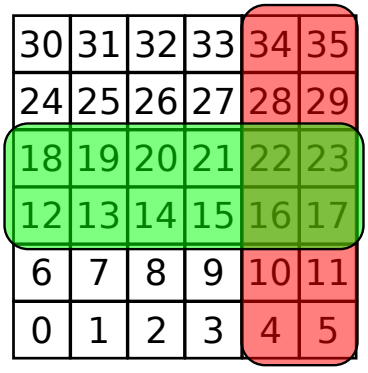
■ **Primjer 2.1** Ponovno razmatramo eksperiment izvlačenja jedne kuglice iz kutije. U kutiju je ubačeno 36 kuglica: kuglica s brojem 0, kuglica s brojem 1, itd. Sve su kuglice istih dimenzija i na opip djeluju isto. Prije izvlačenja, kutija je protresena i izvlačenje se radi na slijepo. Definirajmo dva događaja:

$$A = \{12, 13, 14, 15, 16, 17, 18, 19, 20, 21, 22, 23\}$$

$$B = \{4, 5, 10, 11, 16, 17, 22, 23, 28, 29, 34, 35\}$$

Trebamo odrediti $P(A)$, $P(B)$, $P(A \cap B)$ i $P(A \cup B)$.

Rješenje. Skup elementarnih događaja koji ima 36 elemenata vizualiziran je na slici u nastavku. Na istoj slici označeni su i skupovi A (zeleno) i B (crveno).



Kako ima 36 elementarnih događaja i svi su jednako vjerojatni, vjerojatnost svakog od njih je $1/36$. Skupovi A i B imaju po 12 elementarnih događaja pa je:

$$\begin{aligned}
P(A) &= P(\{12,13,14,15,16,17,18,19,20,21,22,23\}) \\
&= P(\{12\}\cup\{13\}\cup\{14\}\cup\{15\}\cup\{16\}\cup\{17\}\cup\{18\}\cup\{19\}\cup\{20\}\cup\{21\} \\
&\quad \cup\{22\}\cup\{23\}) \\
&= P(\{12\})+P(\{13\})+P(\{14\})+P(\{15\})+P(\{16\})+P(\{17\})+P(\{18\}) \\
&\quad +P(\{19\})+P(\{20\})+P(\{21\})+P(\{22\})+P(\{23\}) \\
&= \frac{1}{36}+\frac{1}{36}+\frac{1}{36}+\frac{1}{36}+\frac{1}{36}+\frac{1}{36}+\frac{1}{36}+\frac{1}{36}+\frac{1}{36}+\frac{1}{36}+\frac{1}{36}+\frac{1}{36} \\
&= \frac{12}{36}=\frac{1}{3}
\end{aligned}$$

Na analogan način dobivamo:

$$P(B)=\frac{1}{3}.$$

Vjerojatnost događa $P(A\cap B)$ je:

$$\begin{aligned}
P(A\cap B) &= P(\{16,17,22,23\}) \\
&= P(\{16\})+P(\{17\})+P(\{22\})+P(\{23\}) \\
&= \frac{1}{36}+\frac{1}{36}+\frac{1}{36}+\frac{1}{36} \\
&= \frac{4}{36}=\frac{1}{9}
\end{aligned}$$

Vjerojatnost unije dvaju događaja prema teoremu s početka poglavlja jednaka je sumi vjerojatnosti tih događaja, ako su isti međusobno isključivi. Uvidom u sliku vidimo da to ovdje nije slučaj. Uvidom u sliku vidimo da unija događaja A i B sadrži 20 elementarnih događaja, dok svaki od događaja A i B sadrži po 12 elementarnih događaja. Pri izračunu $P(A)$ uzet ćemo u obzir sve ishode izvlačenja koji su brojevi od 12 do 23. Ako tome nadodamo $P(B)$, vidimo da smo dva puta pribrojili vjerojatnosti elementarnih događa 16, 17, 22 i 23, a oni su upravo presjek skupova A i B. Stoga je vjerojatnost unije događaja A i B jednaka sumi vjerojatnosti događaja A i događaja B umanjenoj za vjerojatnost presjeka tih događaja:

$$\begin{aligned}
P(A\cup B) &= P(A)+P(B)-P(A\cap B) \\
&= \frac{1}{3}+\frac{1}{3}-\frac{1}{9} \\
&= \frac{5}{9}
\end{aligned}$$

■

Ako su $E_1,\ldots,E_n$ međusobno isključivi događaji čija je unija jednaka S (drugim riječima čine particiju skupa S), tada je:

$$P(A)=\sum_{i=1}^{n}P(A,E_i)$$

Pogledajmo to na prethodnom primjeru. Skup elementarnih događaja koji čine događaj A možemo podijeliti na uniju skupa elementarnih događaja koji čine A i istovremeno su izvan B

(12,13,14,15,18,19,20,21) te skupa elementarnih događaja koji čine A i istovremeno su na B (16,17,22,23). Vrijedi:

$$\begin{aligned}
P(A) &= \frac{|A|}{|S|} \\
&= \frac{|\{12,13,14,15,16,17,18,19,20,21,22,23\}|}{|0,1,\ldots,35|} \\
&= \frac{|\{12,13,14,15,18,19,20,21\} \cup \{16,17,22,23\}|}{|0,1,\ldots,35|} \\
&= \frac{|\{12,13,14,15,18,19,20,21\}| + |\{16,17,22,23\}|}{|0,1,\ldots,35|} \\
&= \frac{|\{12,13,14,15,18,19,20,21\}|}{|0,1,\ldots,35|} + \frac{|\{16,17,22,23\}|}{|0,1,\ldots,35|} \\
&= \frac{|A \cap B^c|}{|S|} + \frac{|\{A \cap B\}|}{|S|} \\
&= P(A,B^c) + P(A,B)
\end{aligned}$$

pri čemu su B i B^c disjunktni skupovi čija je unija jednaka skupu S.

2.1.1 Nezavisni događaji

Bitan pojam koji ćemo trebati pri objašnjenju naivnog Bayesovog klasifikatora jest nezavisnost događaja.

Definicija 2.2 — Nezavisnost događaja.
Za dva događaja A i B kažemo da su nezavisni, ako i samo ako vrijedi:

$$P(A,B) = P(A) \cdot P(B)$$

odnosno da je vjerojatnost da nastupe oba događaja jednaka umnošku vjerojatnosti nastupanja svakog od događaja.

Pogledajmo to na primjeru.

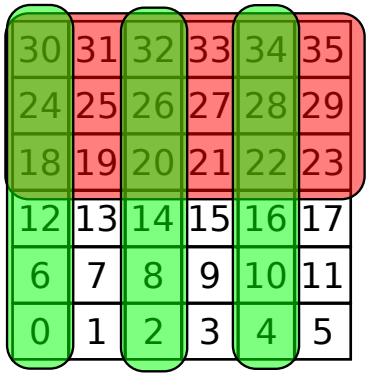
■ **Primjer 2.2** Ponovno razmatramo prethodno opisani eksperiment izvlačenja jedne kuglice iz kutije. Definirajmo dva događaja:

$$A = \{0,2,4,6,8,10,12,14,16,18,20,22,24,26,28,30,32,34\}$$

$$B = \{18,19,20,21,22,23,24,25,26,27,28,29,30,31,32,33,34,35\}$$

Događaj A predstavlja izvlačenje parnog broja. Događaj B predstavlja izvlačenje broja većeg ili jednakog 18. Odredite $P(A)$, $P(B)$, $P(A \cap B)$.

Rješenje. Skup elementarnih događaja koji ima 36 elemenata vizualiziran je na slici u nastavku. Na istoj slici označeni su i skupovi A (zeleno) i B (crveno).



Skup A sadrži 18 elementarnih događaja, pa uz činjenicu da je vjerojatnost svakog elementarnog događaja jednaka (u eksperimentu koji razmatramo), slijedi:

$$P(A) = \frac{18}{36} = \frac{1}{2}.$$

Skup B sadrži također 18 elementarnih događaja pa je:

$$P(B) = \frac{18}{36} = \frac{1}{2}.$$

Uvidom na sliku vidimo da je skup $A \cap B = \{18, 20, 22, 24, 26, 28, 30, 32, 36\}$, pa je:

$$P(A \cap B) = \frac{9}{36} = \frac{1}{4}.$$

Vidimo i da vrijedi:

$$P(A \cap B) = \frac{1}{4} = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} = P(A) \cdot P(B)$$

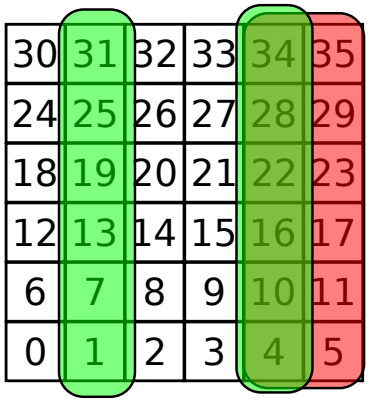
pa su događaji A i B nezavisni događaji.

Evo još par primjera međusobno nezavisnih događaja:

- "izvučen je paran broj" i "izvučen je broj 30 ili veći",
- "izvučen je neparan broj" i "izvučen je broj 23 ili manji",
- "izvučen je paran broj" i "izvučen je broj između 12 i 23" (uz 12 i 23 uključene).

Odredite za svaki od ovih primjera vjerojatnost nastupanja pojedinih događaja te oba događaja. ■

Kako bi izgledao primjer događaja koji nisu nezavisni? Koristeći i dalje eksperiment s izvlačenjem kuglica, pogledajmo sljedeća dva događaja ilustrirana slikom u nastavku.



Događaj A bi odgovarao izvlačenju broja čiji je ostatak djeljenja s 3 jednak 1 (zeleno na slici). Događaj B (crveno na slici) bi odgovarao broju koji je u desna dva stupca (da ne izmišljamo neki pametniji opis). Elementi skupa A pokrivaju 2 od 6 stupaca, pa je vjerojatnost P(A) jednaka:

$$P(A) = \frac{2}{6} = \frac{1}{3}$$

Elementi skupa B također pokrivaju 2 od 6 stupaca, pa je vjejatnost P(B) jednaka:

$$P(B) = \frac{2}{6} = \frac{1}{3}$$

Istovremeno nastupanje događaja A i B opisano je presjekom njihovih skupova i taj skup na slici su pokriva samo predzadnji od 6 stupaca; stoga je:

$$P(A,B) = \frac{1}{6}.$$

Sada vidimo da ne vrijedi da je umnožak $P(A) \cdot P(B) = \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{3} = \frac{1}{9}$ jednak vjerojatnosti nastupanja oba događaja koja je $\frac{1}{6}$. Činjenica da A i B nisu nezavisni trebala bi biti i intuitivno jasna: događaj A u čitavom prostoru elementarnih događaja pokriva trećinu elementarnih događaja; međutim, ako razmotrimo samo elementarne događaje koje pokriva B, u njemu čak polovica elementarnih događaja ispunjava događaj A. Stoga je očito da, ako znamo da je nastupio događaj B, mijenja se vjerojatnost da je nastupio i događaj A, pa ova dva događaja nisu međusobno nezavisna.

Ako razmatramo više od dva događaja, tada treba biti oprezan s terminologijom jer je moguće da, primjerice, u skupu od tri događaja A, B i C, svi u parovima budu nezavisni A i B, A i C, B i C, ali da zajedno ne budu, tj. moguće je da vrijedi $P(A,B) = P(A) \cdot P(B)$, $P(A,C) = P(A) \cdot P(C)$, $P(B,C) = P(B) \cdot P(C)$, ali da ne vrijedi $P(A,B,C) = P(A) \cdot P(B) \cdot P(C)$. Stoga ako kažemo da su događaji nezavisni, podrazumijevati ćemo u svim kombinacijama (dvojkama, trojkama, ...), a ako kažemo da su međusobno nezavisni, podrazumijevat ćemo poseban slučaj gdje vrijedi samo nezavisnost u parovima, ali ne i šire.

2.1.2 Uvjetna vjerojatnost

Uvjetna vjerojatnost ograničava prostor elementarnih događaja na neki podskup. Vratimo se ponovno na prethodnu sliku gdje smo imali događaje A (ostatak dijeljenja jednak 1) i B (dva najdesnija stupca). Vjerojatnost nastupanja događaja A jednaka je omjeru kardinaliteta pridruženog skupa elementarnih događaja te kardinaliteta čitavog prostora elementarnih događaja; u našem slučaju to je bilo:

$$P(A) = \frac{|A|}{|S|} = \frac{12}{36} = \frac{1}{3}.$$

Uvjetna vjerojatnost ograničava elementarne događaje koje razmatramo. Vjerojatnost da nastupi događaj A ako je nastupio događaj B (dakle, uvjetovano nastupanjem događaja B) označit ćemo s P(A|B) i ona će (u našem primjeru gdje su svi elementarni događaji jednako vjerojatni) biti jednaka broju elementarnih događaja koji ispunjavaju događaj A razmotrenih samo na podskupu elementarnih događaja koji ispunjavaju B, podijeljen kardinalitetom skupa B. Primijetite da je to zapravo omjer kardinaliteta presjeka A i B, i kardinaliteta skupa B:

$$P(A|B) = \frac{|A \cap B|}{|B|}$$

U našem konkretnom primjeru, kardinalitet skupa B je 12 (dva najdesnija stupca). Od tih 12 elemenata, 6 (predzadnji stupac) ih ispunjava i događaj A. Stoga je:

$$P(A|B) = \frac{6}{12} = \frac{1}{2}$$

Na istom primjeru vidimo i da je primjerice:

$$P(A|B^c) = \frac{6}{24} = \frac{1}{4}$$

Općenito, P(A|B) i P(B|A) ne moraju biti jednake. Zamislite samo da je A pokrivao 1., 2. i 5. stupac. tada bi bilo $P(A|B) = \frac{1}{2}$ ali $P(B|A) = \frac{1}{3}$.

Vjerojatnost istovremenog nastupanja događaja A i B možemo zapisati i preko uvjetnih vjerojatnosti:

$$P(A,B) = \frac{|A \cap B|}{|S|} = \frac{|A \cap B|}{|S|} \cdot \frac{|B|}{|B|} = \frac{|A \cap B|}{|B|} \cdot \frac{|B|}{|S|} = P(A|B) \cdot P(B)$$

odnosno analogno:

$$P(A,B) = \frac{|A \cap B|}{|S|} = \frac{|A \cap B|}{|S|} \cdot \frac{|A|}{|A|} = \frac{|A \cap B|}{|A|} \cdot \frac{|A|}{|S|} = P(B|A) \cdot P(A)$$

čime smo došli do vrlo važnog izraza:

$$P(A,B) = P(A|B) \cdot P(B) = P(B|A) \cdot P(A) \tag{2.1}$$

Ovaj izraz, samo malo drugačije zapisan, zapravo je poznati Bayesov teorem.

Teorem 2.1 — Bayesov teorem. Neka su A i B dva događaja. Vrijedi:

$$P(B|A) = \frac{P(A|B) \cdot P(B)}{P(A)}.$$

Sada možemo pokazati još jednu važnu relaciju koja vrijedi. Već smo pokazali da je, primjerice:

$$P(A|B) = \frac{P(A,B)}{P(B)}.$$

Ako su događaji A i B međusobno nezavisni, tada je $P(A,B) = P(A) \cdot P(B)$, pa ako to uvrstimo, dobivamo:

$$P(A|B) = \frac{P(A,B)}{P(B)} = \frac{P(A) \cdot P(B)}{P(B)} = P(A).$$

Drugim riječima (i ovo je alternativna definicija nezavisnosti događaja), ako su A i B nezavisni događaji, onda činjenica da znamo da je nastupio jedan od njih ne mijenja vjerojatnost da je nastupio drugi: $P(A|B) = P(A)$ i $P(B|A) = P(B)$.

Konačno, za dva događaja A i B kažemo da su uvjetno nezavisni s obzirom na C, ako vrijedi:

$$P(A,B|C) = P(A|C) \cdot P(B|C).$$

U izrazu za Bayesov teorem nazivnik ćemo ponekad htjeti dalje raspisati na sjedeći način. Uočimo najprije da skup $\{B, B^C\}$ čini particiju prostora događaja: B i B^C međusobno su disjunktni, i njihova unija predstavlja čitav skup događaja S. U tom slučaju, vjerojatnost $P(A)$ možemo izračunati kao sumu vjerojatnosti presjeka A sa svim događajima particije, što u našem slučaju znači:

$$P(A) = P(A,B) + P(A,B^C)$$

čime dobivamo izraz:

$$P(B|A) = \frac{P(A|B) \cdot P(B)}{P(A,B) + P(A,B^C)}.$$

Nadalje, vjerojatnost svakog od ovih presjeka možemo raspisati preko uvjetnih vjerojatnosti:

$$P(A,B) = P(A|B) \cdot P(B)$$

$$P(A,B^C) = P(A|B^C) \cdot P(B^C)$$

čime dobivamo konačan izraz:

$$P(B|A) = \frac{P(A|B) \cdot P(B)}{P(A|B) \cdot P(B) + P(A|B^C) \cdot P(B^C)}. \tag{2.2}$$

2.1.3 Zakon ulančavanja

Posljednje na što ćemo se pozvati kod Byesovog klasifikatora jest izraz koji nam govori kako možemo odrediti vjerojatnost istovremenog nastupanja više od jednog događaja. Prisjetimo se, u slučaju dva događaja mogli smo pisati:

$$P(A,B) = P(A|B) \cdot P(B).$$

Ako razmatramo tri događaja, vrijedi:

$$\begin{aligned} P(A,B,C) &= P(A|B,C) \cdot P(B,C) \\ &= P(A|B,C) \cdot P(B|C) \cdot P(C). \end{aligned}$$

U slučaju četiri događaja imamo:

$$\begin{aligned} P(A,B,C,D) &= P(A|B,C,D) \cdot P(B,C,D) \\ &= P(A|B,C,D) \cdot P(B|C,D) \cdot P(C,D) \\ &= P(A|B,C,D) \cdot P(B|C,D) \cdot P(C|D) \cdot P(D). \end{aligned}$$

Na analogan način možemo raspisati izraz za proizvoljan broj događaja.

2.2 Bayesova shema u produkcijskim sustavima

Na sportskom ste natjecanju i navijač ste domaćeg tima. Vrijeme je hladno i poprilici 15% navijača nosi šal. Među svim navijačima koji su došli popratiti natjecanje, 10% su navijači protivničkog tima. Međutim, poznato je da je jedan od njihovih tradicionalnih rekvizita upravo šal: čak 80% navijača protivničkog tima ga nosi. Ako vidite navijača koji nosi šal, možete li zaključiti da se radi o navijaču protivničkog tima?

Odgovor je, dakako, ne. Naime, pitanje je ekvivalentno onoj poznatoj priči: ako pada kiša, ceste su mokre. Ako vidimo da su ceste mokre, možemo li zaključiti da pada kiša? Pravilo zaključivanja koje to omogućava zove se abdukcija, i znamo da to nije ispravno pravilo zaključivanja. Možemo li, međutim, pojedina opažanja i zaključke na odgovarajući način kvantificirati s određenim mjerama, htjet ćemo dopustiti i uporabu abdukcije kao pravila zaključivanja. Mjera o kojoj je ovdje riječ bit će vjerojatnost.

Vratimo se na početni primjer. Eksperiment koji radimo je gledanje navijača. Pitamo se je li navijač kojeg gledamo navijač protivničkog tima ili nije. Definirat ćemo dva događaja koje ćemo ujedno zvati i hipotezama: s H_{JE} ćemo uznačiti hipotezu "navijač je navijač protivničkog tima", a s H_{NIJE} ćemo uznačiti hipotezu "navijač nije navijač protivničkog tima". Iz početnog opisa znamo da 10% navijača navija za protivnički tim:

$$P(H_{\text{JE}}) = 0.1.$$

Znamo također da 15% svih navijača nosi šal:

$$P(\text{nosi šal}) = 0.15$$

te da 80% navijača protivničkog tima nosi šal - čime je zapravo iskazana uvjetna vjerojatnost:

$$P(\text{nosi šal}|H_{\text{JE}}) = 0.8$$

Zadatak nas traži da odredimo vjerojatnost da je navijač kojeg smo sreli i koji nosi šal navijač protivničkog tima. Sjetimo li se da je vjerojatnost istovremenog nastupanja oba događaja jednaka:

$$P(\text{nosi šal}, H_{\text{JE}}) = P(\text{nosi šal}|H_{\text{JE}}) \cdot P(H_{\text{JE}}) = P(H_{\text{JE}}|\text{nosi šal}) \cdot P(\text{nosi šal})$$

iz čega možemo odrediti traženu uvjetnu vjerojatnost $P(H_{\text{JE}}|\text{nosi šal})$:

$$P(H_{\text{JE}}|\text{nosi šal}) = \frac{P(\text{nosi šal}|H_{\text{JE}}) \cdot P(H_{\text{JE}})}{P(\text{nosi šal})} = \frac{0.8 \cdot 0.1}{0.15} = 0.53$$

Vjerojatnost da gledamo navijača protivničkog tima je dakle preko 50%.

Činjenicu da navijač nosi šal općenito ćemo zvati uočenim dokazima, i označavati velikim slovom E.

Pogledajmo još jedan primjer: liječnik obrađuje niz pacijenata i sve bilježi u kartonima. Nakon mnoštva obrađenih pacijenata, liječnik je identificirao niz bolesti: gripa, prehlada, upala pluća, meningitis, itd. Na temelju svih obrađenih pacijenata i pretpostavke da niti jedan pacijent nije istovremeno imao više od jedne bolesti, liječnik može procijeniti kolika je vjerojatnost da pacijent ima svaku od bolesti tako da podijeli broj pacijenata koji su imali promatranu bolest s ukupnim brojem obrađenih pacijenata.

Za svakog pacijenta, liječnik iz zapisa može odrediti i koliko je pacijenata imalo temperaturu, koliko ih je imalo začepljen nos, koliko ih je imalo upaljeno grlo i slično, te ponovno dijeljenjem s ukupnim brojem pacijenata može procijeniti kolika je vjerojatnost da pacijent ima temperaturu, kolika je vjerojatnost da ima začepljen nos, kolika je vjerojatnost da ima upaljeno grlo i slično.

Međutim, iz podataka kojima raspolaže, liječnik može odrediti i niz uvjetnih vjerojatnosti: od svih pacijenata koji su imali gripu, koliko ih je imalo temperaturu (što omogućava procjenu P(temperatura|gripa)), koliko ih je imalo začepljen nos (što omogućava procjenu P(začepljen nos|gripa)), koliko ih je imalo upaljeno grlo (što omogućava procjenu P(upaljeno grlo|gripa)), te analogne procjene može izvući i za sve ostale bolesti.

Opažanja poput *Ima temperaturu*, *ima začepljen nos* i *Ima upaljeno grlo* zvat ćemo dokazima. Primijetite da u stvarnom životu, bolest uzrokuje opažene simptome; obrat ne vrijedi. Prehlada kao jedan od simptoma može imati upaljeno grlo. Upaljeno grlo međutim nije uzrok prehlade. Izjave "pacijent boluje od prehlade", "pacijent boluje od gripe" i slično, zvat ćemo hipotezama.

Ako imam jedan dokaz E i skup od m međusobno isključivih hipoteza $\{H_j\}_{j=1}^{m}$ (koje pokrivaju čitav skup elementarnih događaja), tada prema pojašnjenju iz prethodnog poglavlja možemo pisati:

$$P(E) = \sum_{j=1}^{m} P(E, H_j) = \sum_{j=1}^{m} P(H_j) \cdot P(E|H_j)$$

prva jednakost vrijedi jer pretpostavljamo da su hipoteze međusobno isključive te da pokrivaju čitav prostor događaja. Druga jednakost raspisuje vjerojatnost para preko uvjetne vjerojatnosti. Ono što nas zanima jest, ako smo opazili dokaz E, kolika je vjerojatnost da pacijent ima određenu bolest (odnosno da je nastupio događaj H_i). Istu prema Bayesovom teoremu možemo izračunati kao:

$$P(H_i|E) = \frac{P(E|H_i) \cdot P(H_i)}{P(E)} = \frac{P(E|H_i) \cdot P(H_i)}{\sum_{j=1}^{m} P(H_j) \cdot P(E|H_j)}$$

Da bismo ovo mogli izračunati, trebamo samo vjerojatnosti svake od hipoteza (drugim riječima, bolesti), te uvjetne vjerojatnosti dokaza uz svaku od hipoteza (drugim riječima, opaženog simptoma po svakoj od bolesti). To su sve podatci koje liječnik iz zapisa pacijenata može procijeniti.

U praksi uobičajeno razmatramo situaciju u kojoj imamo više dokaza: imamo pacijenta koji ima temperaturu (dokaz E_1) i upaljeno grlo (dokaz E_2). Zanima nas kolika je vjerojatnost da ima određenu bolest:

$$P(H_i|E_1,E_2) = \frac{P(E_1,E_2|H_i) \cdot P(H_i)}{P(E_1,E_2)} = \frac{P(E_1,E_2|H_i) \cdot P(H_i)}{\sum_{j=1}^{m} P(E_1,E_2,H_j)} = \frac{P(E_1,E_2|H_i) \cdot P(H_i)}{\sum_{j=1}^{m} P(H_j) \cdot P(E_1,E_2|H_j)}.$$

Da bismo ovo izračunali, sada nam treba puno više podataka: primjerice, za svaku od bolesti, trebamo vjerojatnost da su istovremeno uočena oba simptoma. kako općenito možemo imati proizvoljan broj simptoma, broj podataka koji trebamo da bismo odredili točne vjerojatnosti postaje nedostupan. Stoga ćemo uvesti "naivnu" pretpostavku da su svi dokazi međusobno uvjetno nezavisni s obzirom na hipoteze; drugim riječima, da vrijedi $P(E_1,E_2|H_i) = P(E_1|H_i) \cdot P(E_2|H_i)$. Uz tu pretpostavku, prethodni izraz se pretvara u:

$$P(H_i|E_1,E_2) = \frac{P(E_1|H_i) \cdot P(E_2|H_i) \cdot P(H_i)}{P(E_1,E_2)} = \frac{P(E_1|H_i) \cdot P(E_2|H_i) \cdot P(H_i)}{\sum_{j=1}^{m} P(H_j) \cdot P(E_1|H_j) \cdot P(E_2|H_j)}.$$

odnosno u najopćenitijem slučaju za n dokaza i m hipoteza:

$$P(H_i|E_1,\ldots,E_n) = \frac{P(H_i) \prod_{k=1}^{n} P(E_k|H_i)}{P(E_1,\ldots,E_n)} = \frac{P(H_i) \prod_{k=1}^{n} P(E_k|H_i)}{\sum_{j=1}^{m} P(H_j) \prod_{k=1}^{n} P(E_k|H_j)}. \tag{2.3}$$

Pogledajmo sada nekoliko primjera.

2.2.1 Primjer 1

Poznati su sljedeći podatci. Vjerojatnost da osoba ima gripu je 0.2. Nadalje, ako osoba ima gripu, tada će s vjerojatnošću 0.75 imati hunjavicu. S druge strane, ljudi mogu imati hunjavicu iz zbog drugih razloga - primjerice, alergije. Tako je poznato da ako osoba nema gripu, tada će s vjerojatnošću od 0.2 imati hunjavicu.

Možemo li sada izračunati vjerojatnost da osoba ima gripu ako je opaženo da ima hunjavicu? Pogledajmo što znamo.

Naš prostor hipoteza sastoji se od samo dvije hipoteze: H (osoba ima gripu) i H^C (osoba nema gripu), i one pokrivaju čitav prostor događaja. Također, imamo samo jednu činjenicu: E (osoba ima hunjavicu).

Iz danog teksta znamo:

- $P(H) = P(\text{osoba ima gripu}) = 0.2$

- Kako H i H^C čine potpun skup događa, slijedi da je $P(H)+P(H^C)=1$ odnosno $P(\text{osoba nema gripu})=P(H^C)=1-P(H)=0.8$
- $P(E|H)=P(\text{osoba ima hunjavicu} \mid \text{osoba ima gripu})=0.75$
- $P(E|H^C)=P(\text{osoba ima hunjavicu} \mid \text{osoba nema gripu})=0.2$

Da bismo odgovorili na postavljeno pitanje, odnosno odredili $P(\text{osoba ima gripu} \mid \text{osoba ima hunjavicu})=P(H|E)$, iskoristit ćemo prethodno izvedeni Bayesov teorem, odnosno izraz:

$$P(H|E)=\frac{P(E|H)\cdot P(H)}{P(E)}=\frac{P(E|H)\cdot P(H)}{P(E,H)+P(E,H^C)}=\frac{P(E|H)\cdot P(H)}{P(E|H)\cdot P(H)+P(E|H^C)\cdot P(H^C)}$$

pa uvrštavanjem svih poznatih podataka dobivamo:

$$P(H|E)=\frac{0.75\cdot 0.2}{0.75\cdot 0.2+0.2\cdot 0.8}=\frac{0.15}{0.31}\approx 0.48387$$

Primijetimo da je nazivnik (0.31) zapravo vjerojatnost da osoba ima hunjavicu, tj. $P(E)$, pa prethodni izraz riječima možemo izreći kao slijedi:

$$P(\text{osoba ima gripu} \mid \text{osoba ima hunjavicu})=\frac{P(\text{osoba ima hunjavicu} \mid \text{osoba ima gripu})\cdot P(\text{osoba ima gripu})}{P(\text{osoba ima hunjavicu})}$$

Odredimo sada i vjerojatnost da osoba ima gripu ako nema hunjavicu. Prema Bayesovom teoremu vrijedi:

$$P(H|E^C)=\frac{P(E^C|H)\cdot P(H)}{P(E^C)}$$

Iz danih podataka znamo da vjerojatnost da osoba ima hunjavicu ako ima gripu, odnosno $P(E|H)$, iznosi 0.75. No kako E i E^C čine particiju, slijedi da je $P(E^C|H)=1-P(E|H)=1-0.75=0.25$. Također, prethodno smo izračunali da je $P(E)=0.31$; uz istu argumentaciju kao maloprije vrijedi $P(E^C)=1-P(E)=1-0.31=0.69$. Uvrštavanjem slijedi:

$$P(H|E^C)=\frac{0.25\cdot 0.2}{0.69}\approx 0.07246$$

Prokomentirajmo još jedno opažanje. Omjer $P(H|E)/P(H)\approx 2.4$ nam govori da činjenica da osoba ima hunjavicu povećava vjerojatnost da ima gripu za poprilici 2.4 puta. Omjer $P(H|E^C)/P(H)\approx 2.76$ nam govori da činjenica da osoba nema hunjavicu smanjuje vjerojatnost da ima gripu za poprilici 2.8 puta.

2.2.2 Primjer 2

Pogledajmo složeniji slučaj sa tri hipoteze koje čine particiju:

- H_1: osoba ima prehladu
- H_2: osoba ima alergiju
- H_3: osoba je osjetljiva na svjetlo

i neka možemo opaziti dvije činjenice:

- E_1: osoba ima hunjavicu
- E_2: osoba kašlje

Nadalje, neka su nam poznate sljedeće vjerojatnosti.

	$i=1$	$i=2$	$i=3$
$P(H_i)$	0.6	0.3	0.1
$P(E_1\|H_i)$	0.3	0.8	0.3
$P(E_2\|H_i)$	0.6	0.9	0.0

Primijetite da je suma vjerojatnosti u prvom retku nužno jednaka 1 jer hipoteze čine particiju. Sume u druga dva retka ne moraju biti (i nisu) jednake jedan. Odredimo kolike su vjerojatnosti svake od hipoteza ako smo uočili da osoba ima hunjavicu (odnosno da vrijedi E_1). Tražimo, dakle, $P(H_1|E_1)$, $P(H_2|E_1)$ i $P(H_3|E_1)$.

$$\begin{aligned}
P(H_1|E_1) &= \frac{P(E_1|H_1)\cdot P(H_1)}{P(E_1)} \\
&= \frac{P(E_1|H_1)\cdot P(H_1)}{P(E_1,H_1)+P(E_1,H_2)+P(E_1,H_3)} \\
&= \frac{P(E_1|H_1)\cdot P(H_1)}{P(E_1|H_1)\cdot P(H_1)+P(E_1|H_2)\cdot P(H_2)+P(E_1|H_3)\cdot P(H_3)} \\
&= \frac{0.3\cdot 0.6}{0.3\cdot 0.6+0.8\cdot 0.3+0.3\cdot 0.1} \\
&= 0.4
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
P(H_2|E_1) &= \frac{P(E_1|H_2)\cdot P(H_2)}{P(E_1)} \\
&= \frac{P(E_1|H_2)\cdot P(H_2)}{P(E_1,H_1)+P(E_1,H_2)+P(E_1,H_3)} \\
&= \frac{P(E_1|H_2)\cdot P(H_2)}{P(E_1|H_1)\cdot P(H_1)+P(E_1|H_2)\cdot P(H_2)+P(E_1|H_3)\cdot P(H_3)} \\
&= \frac{0.8\cdot 0.3}{0.3\cdot 0.6+0.8\cdot 0.3+0.3\cdot 0.1} \\
&= 0.53
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
P(H_3|E_1) &= \frac{P(E_1|H_3)\cdot P(H_3)}{P(E_1)} \\
&= \frac{P(E_1|H_3)\cdot P(H_3)}{P(E_1,H_1)+P(E_1,H_2)+P(E_1,H_3)} \\
&= \frac{P(E_1|H_3)\cdot P(H_3)}{P(E_1|H_1)\cdot P(H_1)+P(E_1|H_2)\cdot P(H_2)+P(E_1|H_3)\cdot P(H_3)} \\
&= \frac{0.3\cdot 0.1}{0.3\cdot 0.6+0.8\cdot 0.3+0.3\cdot 0.1} \\
&= 0.06
\end{aligned}$$

U prisustvu dokaza E_1, vjerojatnosti hipoteza H_1 i H_3 su se smanjile s 0.6 i 0.1 na 0.4 i 0.06; vjerojatnost hipoteze H_2 je porasla s 0.3 na 0.53.

Ako je uz hunjavicu primijećeno da osoba i kašlje (pa imamo opažene i E_1 i E_2), kolike su vjerojatnosti pojedinih hipoteza uz ove dokaze?

$$
\begin{aligned}
P(H_1|E_1,E_2) &= \frac{P(E_1,E_2|H_1)\cdot P(H_1)}{P(E_1,E_2)} \\
&= \frac{P(E_1,E_2|H_1)\cdot P(H_1)}{P(E_1,E_2,H_1)+P(E_1,E_2,H_2)+P(E_1,E_2,H_3)} \\
&= \frac{P(E_1,E_2|H_1)\cdot P(H_1)}{P(E_1,E_2|H_1)\cdot P(H_1)+P(E_1,E_2|H_2)\cdot P(H_2)+P(E_1,E_2|H_3)\cdot P(H_3)} \\
&= \frac{P(E_1|H_1)\cdot P(E_2|H_1)\cdot P(H_1)}{P(E_1|H_1)\cdot P(E_2|H_1)\cdot P(H_1)+P(E_1|H_2)\cdot P(E_2|H_2)\cdot P(H_2)+P(E_1|H_3)\cdot P(E_2|H_3)\cdot P(H_3)} \\
&= \frac{0.3\cdot 0.6\cdot 0.6}{0.3\cdot 0.6\cdot 0.6+0.8\cdot 0.9\cdot 0.3+0.3\cdot 0.0\cdot 0.1} \\
&= 0.33
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
P(H_2|E_1,E_2) &= \frac{P(E_1,E_2|H_2)\cdot P(H_2)}{P(E_1,E_2)} \\
&= \frac{P(E_1,E_2|H_2)\cdot P(H_2)}{P(E_1,E_2,H_1)+P(E_1,E_2,H_2)+P(E_1,E_2,H_3)} \\
&= \frac{P(E_1,E_2|H_2)\cdot P(H_2)}{P(E_1,E_2|H_1)\cdot P(H_1)+P(E_1,E_2|H_2)\cdot P(H_2)+P(E_1,E_2|H_3)\cdot P(H_3)} \\
&= \frac{P(E_1|H_2)\cdot P(E_2|H_2)\cdot P(H_2)}{P(E_1|H_1)\cdot P(E_2|H_1)\cdot P(H_1)+P(E_1|H_2)\cdot P(E_2|H_2)\cdot P(H_2)+P(E_1|H_3)\cdot P(E_2|H_3)\cdot P(H_3)} \\
&= \frac{0.8\cdot 0.9\cdot 0.3}{0.3\cdot 0.6\cdot 0.6+0.8\cdot 0.9\cdot 0.3+0.3\cdot 0.0\cdot 0.1} \\
&= 0.67
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
P(H_3|E_1,E_2) &= \frac{P(E_1,E_2|H_3)\cdot P(H_3)}{P(E_1,E_2)} \\
&= \frac{P(E_1,E_2|H_3)\cdot P(H_3)}{P(E_1,E_2,H_1)+P(E_1,E_2,H_2)+P(E_1,E_2,H_3)} \\
&= \frac{P(E_1,E_2|H_3)\cdot P(H_3)}{P(E_1,E_2|H_1)\cdot P(H_1)+P(E_1,E_2|H_2)\cdot P(H_2)+P(E_1,E_2|H_3)\cdot P(H_3)} \\
&= \frac{P(E_1|H_3)\cdot P(E_2|H_3)\cdot P(H_3)}{P(E_1|H_1)\cdot P(E_2|H_1)\cdot P(H_1)+P(E_1|H_2)\cdot P(E_2|H_2)\cdot P(H_2)+P(E_1|H_3)\cdot P(E_2|H_3)\cdot P(H_3)} \\
&= \frac{0.3\cdot 0.0\cdot 0.1}{0.3\cdot 0.6\cdot 0.6+0.8\cdot 0.9\cdot 0.3+0.3\cdot 0.0\cdot 0.1} \\
&= 0.00
\end{aligned}
$$

2.3 Problem Monty Hall

Monty Hall je bio voditelj popularne zabavne televizijske emisije u kojoj su igrači mogli osvojiti vrijedne nagrade. Igrač je stajao zajedno s voditeljem pred pozornicom na kojoj su bile tri prostorije i tri početno zatvorena vrata - označimo ih brojevima 1, 2 i 3. U jednoj prostoriji nalazio se vrlo vrijedan poklon, dok su u druge dvije prostorije bili bezvrijedni pokloni. Igra bi započela tako da bi Monty pitao igrača da odabere jedna vrata koja bi htio otvoriti. Nakon što bi igrač napravio odabir

(ali ta vrata i dalje ostaju zatvorena), Monty bi otvorio jedna od preostalih dvaju vrata, i to naravno uvijek ona za koje je Monty znao da je iza njih bezvrijedna nagrada (Monty točno zna iza kojih se vrata nalazi vrijedan poklon). Sada su na pozornici ostale dvije zatvorene prostorije: ona koju je igrač početno odabrao i druga koju Monty još nije otvorio. U tom trenutku, Monty bi igraču ponudio odabir: ostaje li pri svojem izboru, ili želi promijeniti odluku na onu drugu neotvorenu prostoriju.

I tu dolazimo do najzanimljivijeg pitanja ove igre: *je li igraču pametnije da promijeni odabir, ili da se drži svojeg odabira*? Naime, igrač će kući ponijeti onu nagradu koja se nalazi iza vrata koja u konačnici budu njegov posljednji odabir.

Prilikom razmišljanja o ovom problemu, mnogi će problemu pristupiti ovako. Recimo da je igrač početno odabrao vrata 1. Neka je Monty potom otvorio vrata 3 i pokazao da se u toj prostoriji nalazi bezvrijedan poklon. Ostala su dvoja neotvorena vrata: 1 i 2. I sada je mnogima prirodno zaključiti sljedeće: s obzirom da su dvoja vrata neotvorena, vjerojatnost da je vrijedan poklon iza svakih od njih je 50%, pa je potpuno svejedno hoće li igrač promijeniti odabir ili neće. Nekako se čini da je takvo razmišljanje skroz intuitivno. Ili?

Da bismo istražili ovaj problem i potvrdili kasniji teorijski zaključak do kojeg ćemo doći, uz ovaj tekst pripremljen je pomoćni program `book.ml.monty.game.experiments.CollectStatistics` napisan u programskom jeziku Java. Prilikom pokretanja, programu se može kao argument zadati broj igara koje treba odigrati, a ako se taj broj ne zada, pretpostavljena vrijednost je 10000. Po pokretanju, program će odsimulirati zadani broj igara u kojima igrač ne mijenja odluku (dakle, drži se početnog odabira) i potom isto toliko igara u kojima igrač mijenja svoju odluku. Ako se program pokrene u direktoriju u kojem se smiju stvarati datoteke, program će u datoteku imena "podatci-bez-promjene.txt" zapisati trag svih odigranih igara u kojima igrač nije radio promjenu, te u datoteku "podatci-uz-promjenu.txt" trag svih odigranih igara u kojima igrač je radio promjenu. Primjerice, pokretanjem programa i zatim uvidom u datoteku "podatci-bez-promjene.txt" mogli bismo vidjeti nešto poput:

```
_P_        2        3        3        false
P__        1        1        1        true
_P_        2        3        3        false
_P_        2        2        2        true
```

Prvi stupac vizualno prikazuje stvarno stanje igre; slovo P označava gdje je bila vrijedna nagrada. Drugi, treći i četvrti stupac redom sadrže broj vrata iza kojih je bila vrijedna nagrada, broj vrata koja je igrač početno odabrao te broj vrata s kojima je igrač išao dalje nakon što ga je Monty pitao želi li promijeniti odluku; u danom primjeru ova dva stupca će imati iste vrijednosti jer igrač ne mijenja odluku.

Isprobajte

Da biste ovo isprobali samostalno, u naredbenom retku zadajte:

```
java -cp book-uncertainty.jar
book.ml.monty.game.experiments.CollectStatistics
```

čime ćete pokrenuti program, generirati datoteke s tragom izvođenja te dobiti konačnu statistiku.

Ako sami želite podesiti koliko igara želite odsimulirati, zadajte ih kao argument pri pokretanju programa. Primjerice, ako želite da se dva puta odigra po 500 igara, naredba bi bila:

```
java -cp book-uncertainty.jar
book.ml.monty.game.experiments.CollectStatistics 500
```

Ono što je zanimljivo jest promotriti završnu statistiku koju program generira na zaslonu. Evo ispisa koji je dobiven nakon jednog pokretanja programa.

```
Generiram datoteku: podatci-bez-promjene.txt.
Generiram datoteku: podatci-uz-promjenu.txt.

Kada se ne radi promjena odluke:
================================

Broj puta da je nagrada bila iza pojedinih vrata:
Vrata 1: broj odabira = 3350, postotak = 33.50
Vrata 2: broj odabira = 3359, postotak = 33.59
Vrata 3: broj odabira = 3291, postotak = 32.91

Broj puta da je igrač početno odabrao pojedina vrata:
Vrata 1: broj odabira = 3311, postotak = 33.11
Vrata 2: broj odabira = 3274, postotak = 32.74
Vrata 3: broj odabira = 3415, postotak = 34.15

Broj puta da je igrač pobijedio ili izgubio:
Izgubio: broj puta = 6679, postotak = 66.79
Pobijedio: broj puta = 3321, postotak = 33.21

Kada se radi promjena odluke:
=============================

Broj puta da je nagrada bila iza pojedinih vrata:
Vrata 1: broj odabira = 3319, postotak = 33.19
Vrata 2: broj odabira = 3339, postotak = 33.39
Vrata 3: broj odabira = 3342, postotak = 33.42

Broj puta da je igrač početno odabrao pojedina vrata:
Vrata 1: broj odabira = 3381, postotak = 33.81
Vrata 2: broj odabira = 3305, postotak = 33.05
Vrata 3: broj odabira = 3314, postotak = 33.14

Broj puta da je igrač pobijedio ili izgubio:
Izgubio: broj puta = 3383, postotak = 33.83
Pobijedio: broj puta = 6617, postotak = 66.17
```

Što nam pokazuju ovi rezultati? Prvo, vidimo da je program nagradu nasumice razmještao iza svih triju vrata ravnomjerno. Ako igrač nije mijenjao svoju odluku, izgubio je u 67% slučajeva, odnosno vrijednu nagradu je osvojio u samo 33% slučajeva. S druge strane, ako je igrač mijenjao svoju odluku, izgubio je u 33% slučajeva, odnosno vrijednu nagradu je osvojio u čak 67% slučajeva. Eksperiment nam pokazuje da kad smo u drugom dijelu igre suočeni s pitanjem: "iza kojih vrata je vrijedna nagrada" i kad imamo samo dvije opcije, vjerojatnosti ipak nisu 50% - 50%. Možete li ovo objasniti? Razmislite!

Isprobajte

Želite li samostalno zaigrati ovu igru, pokrenite program:
`java -cp book-uncertainty.jar book.ml.monty.game.GUI`
Ako želite igrati igru s više od troja vrata, prilikom pokretanja programa samo dopišite kao argument broj vrata, primjerice:
`java -cp book-uncertainty.jar book.ml.monty.game.GUI 20`
Po pokretanju, program će Vas voditi korak po korak kroz igru. Igru možete ponavljati više puta i program će automatski računati statistike.

2.3.1 Objašenjenje problema Monty Hall na intuitivan način

Da bismo razumjeli zašto se više isplati promijeniti odluku, a u konačnici, i zašto smo u prethodnom primjeru dobili vjerojatnosti za pobjedu 2/3 odnosno 1/3 ovisno o tome jesmo li ili nismo radili promjenu, pogledajmo poopćenu inačicu ove igre. Neka na raspolaganju imamo n prostorija s vratima D_1 do D_n. Primjerice, neka imamo 100 prostorija. Nagrada će svaki puta biti nasumično smještena iza jednih odabranih vrata. Koliko je vjerojatnost da je nagrada završila iza vrata broj 1? Iza vrata broj 2? Iza vrata broj 3? S obzirom da je za svaku igru nagrada smještena iza vrata koja su slučajno odabrana prema uniformnoj distribuciji, odgovor na sva postavljena pitanja je isti: $1/n$, odnosno u našem slučaju 0.01.

Pretpostavimo sada, bez gubitka općenitosti, da igrač bira vrata broj 1. I sada napravimo sljedeće: razdijelimo sve prostorije u dva skupa: prvi, označimo ga s S_1, u kojem se nalazi samo ona prostorija koju smo početno odabrali, te drugi, označimo ga s S_2 u kojem se nalazi preostalih $n-1$ prostorija. Kolika je vjerojatnost da je vrijedna nagrada u prostorijama skupa S_1? Moralo bi biti jasno da je ona $1/n$ odnosno 0.01. A kolika je vjerojatnost da je vrijedna nagrada u prostorijama skupa S_2? Taj skup sadrži n-1 prostoriju, a već smo izračunali da je vjerojatnost da se nagrada nalazi u pojedinoj prostoriji jednaka $1/n$, što znači da sada imamo sumu $1/n$ i to $n-1$ puta, odnosno da je vjerojatnost da je nagrada u nekoj od prostorija iz ovog skupa jednaka $(n-1)/n$, odnosno u našem slučaju 0.99. I ovo bi moralo biti intuitivno jasno: mi smo odabrali jednu prostoriju, nismo preostalih 99; vjerojatnost da je nagrada iza naših vrata je 0.01, a da je iza nekih od preostalih 99 je upravo 0.99.

I sada dolazimo do najvažnijeg momenta: pretpostavimo da Monty odabere jedna od tih 99 vrata, primjerice, vrata broj 37 i otvori ih te nam pokaže da tamo nije nagrada. Što se događa s vjerojatnostima? Očito: $P(\text{nagrada}|\text{vrata} = 37) = 0$. No primijetite što se i dalje nije promijenilo: vjerojatnost da je nagrada u jednoj od prostorija skupa S_2 je i dalje 0.99: ta je vjerojatnost određena u trenutku nastanka igre - nitko nakon otvaranja jednih vrata neće premještati nagradu iz jedne prostorije u drugu. Sada u skupu S_2 imamo jednu prostoriju u kojoj vidimo da nema nagrade, i još njih 98 koje imaju zatvorena vrata. Kolika je vjerojatnost da je nagrada iza svakih od tih 98 vrata? Ta se vjerojatnost pod utjecajem dokaza da nagrada nije iza vrata broj 37 doista mijenja, odnosno masa od 0.99 sada se redistribuira na preostalih 98 vrata skupa S_2, i za svaka neotvorena vrata sada iznosi $0.99/98 = 0.0101$ što je veće od 0.01 (a to je i dalje vjerojatnost da je nagrada iza vrata koja je igrač početno odabrao jer se ta vjerojatnost ne mijenja).

U nastavku igre, Monty bi nam sada mogao otvarati jedna po jedna vrata, dok nam ne otvori njih 98, u kojem slučaju nam ostaju jedna neotvorena vrata one prostorije iz skupa S_1 i jedna neotvorena vrata prostorije iz skupa S_2. S jednom bitnom razlikom: vjerojatnost da je nagrada u prostoriji skupa S_1 i dalje je 0.01, a vjerojatnost da je nagrada u prostoriji skupa S_2 uslijed redistribucija vjerojatnosti došla je do 0.99!

I ako bi nas sada Monty pitao želimo li promijeniti odluku - odgovor bi trebao biti jasan: apsolutno da!

Raspišimo ove vjerojatnosti i kroz općenite simbole. Uz n vrata vrijedi:

- početna vjerojatnost da je vrijedna nagrada iza vrata i je $1/n$ za $i \in \{1,2,\ldots,n\}$
- nakon što igrač napravi prvi izbor, vjerojatnost da je nagrada u skupu S_1 je $1/n$, dok je vjerojatnost da je nagrada u skupu S_2 jednaka $(n-1)/n$
- nakon što Monty otvori $n-2$ vrata iz skupa S_2, tamo ostaju samo jedna neotvorena vrata, i vjerojatnost da je nagrada iza njih je $(n-1)/n$

Sada vidimo da je pitanje "želite li promijeniti odluku" zapravo pitanje: ostajete li pri svojoj odluci da je nagrada u skupu S_1 ili želite prijeći u skup S_2? Također, sada je jasno zašto smo u izvornoj inačici igre konvergirali prema vjerojatnostima 1/3 odnosno 2/3: kako je $n = 3$, vjerojatnost da je nagrada iza naših početno odabranih vrata je $1/n = 1/3$, a vjerojatnost da je nagrada iza neotvorenih vrata nakon što Monty jedna otvori je $(n-1)/n = 2/3$. I upravo iz tog razloga i naš je eksperiment pokazao da ćemo u prosjeku nagradu dobivati u 2/3 slučajeva ako radimo promjenu odluke, odnosno samo u 1/3 slučajeva ako se držimo početne odluke.

2.3.2 Objašenjenje problema Monty Hall preko Bayesovog teorema

Da bismo pojasnili uporabom Bayesovog teorema zašto je veća vjerojatnost da ćemo dobiti nagradu ako napravimo promjenu odluke, uvedimo najprije nekoliko oznaka i poznatih vjerojatnosti.

- Oznakom N_k gdje je $k \in \{1,2,3\}$ označit ćemo događaj *nagrada se nalazi iza vrata broj k*.
- Oznakom M_{ij} označit ćemo da je Monty otvorio vrata j nakon što je igrač početno odabrao vrata i.

Primjerice, A_1 označava događaj "nagrada se nalazi iza vrata broj 1". M_{23} označava događaj "Nakon što je igrač odabrao vrata broj 2, Monty je otvorio vrata broj 3.

Pogledajmo sada što sve znamo. Kako se početno nagrada smješta u prostoriju potpuno nasumičnim odabirom, a imamo tri prostorije, vrijedi:

$$P(N_1) = P(N_2) = P(N_3) = \frac{1}{3}$$

odnosno nagrada ima jednaku vjerojatnost da se zatekne iza svakih od troja vrata.

Razmotrimo i uvjetnu vjerojatnost da će nastupiti događaj M_{ij} ako je nastupio događaj N_k. Ova vjerojatnost definirana je po slučajevima kako slijedi.

$$P(M_{ij}|N_k) = \begin{cases} 0, & i = j \\ 0, & j = k \\ \frac{1}{2}, & i = k \\ 1, & i \neq k \wedge j \neq k \end{cases}$$

Pri tome:

- prvi slučaj predstavlja situaciju u kojoj bi Monty otvorio ista vrata koja je odabrao igrač (to ne smije pa je vjerojatnost 0),
- drugi slučaj predstavlja situaciju u kojoj bi Monty otvorio ista vrata iza kojih se krije i vrijedna nagrada (to ne smije pa je vjerojatnost 0),
- treći slučaj predstavlja situaciju u kojoj je igrač već početno odabrao onu prostoriju koja sadrži nagradu; tada Monty s jednakom vjerojatnošću može otvoriti bilo koja od prestalih dvoja vrata, pa svaka od njih imaju vjerojatnost da budu otvorena $\frac{1}{2}$,
- četvrti slučaj predstavlja situaciju u kojoj je igrač odabrao prostoriju i koja ne sadrži nagradu (koja je u prostoriji k) pa u tom slučaju Monty nema izbora nego mora otvoriti preostala treća vrata j (koja nisu niti i-ta niti k-ta) i to onda radi s vjerojatnošću 1.

Kako bi nam dalje bilo lakše pratiti što se događa, idemo bez gubitka općenitosti razmotriti slučaj u kojem igrač početno odabire vrata broj 1, a Monty nakon toga otvara vrata broj 3. Nastupio je dakle događaj M_{13}. Izračunajmo kolika je vjerojatnost da se nagrada nalazi iza vrata broj 1

koja je odabrao igrač (tj. da nastupi događaj N_1) ako znamo da je nastupio događaj M_{13}. Zanima nas dakle uvjetna vjerojatnost: $P(N_1|M_{13})$. Prema Bayesovom teoremu, ovu vjerojatnost možemo izraziti kao:

$$P(N_1|M_{13}) = \frac{P(M_{13}|N_1) \cdot P(N_1)}{P(M_{13})}$$

Brojnik s desne strane možemo lagano izračunati. Ako je nagrada iza vrata broj 1, i ako je igrač početno odabrao ta vrata, onda Monty preostala dvoja vrata (2 i 3) otvara s jednakom vjerojatnošću od $\frac{1}{2}$, pa je tako vjerojatnost da će otvoriti treća vrata u ovom scenariju jednaka $P(M_{13}|N_1) = \frac{1}{2}$. Također, već smo zaključili da je $P(N_1) = P(N_2) = P(N_3) = \frac{1}{3}$. Time je brojnik jednak $\frac{1}{2} \cdot \frac{1}{3} = \frac{1}{6}$.

Vjerojatnost u nazivniku $P(M_{13})$ raspisat ćemo kao sumu vjerojatnosti nastupanja združenih događaja M_{13} i particije N_1, N_2, N_3, i njih dalje razriješiti preko uvjetnih vjerojatnosti:

$$\begin{aligned} P(M_{13}) &= P(M_{13}, N_1) + P(M_{13}, N_2) + P(M_{13}, N_3) \\ &= P(M_{13}|N_1) \cdot P(N_1) + P(M_{13}|N_2) \cdot P(N_2) + P(M_{13}|N_3) \cdot P(N_3) \\ &= \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{3} + 1 \cdot \frac{1}{3} + 0 \cdot \frac{1}{3} \\ &= \frac{1}{2} \end{aligned}$$

Stoga je tražena vjerojatnost:

$$P(N_1|M_{13}) = \frac{P(M_{13}|N_1) \cdot P(N_1)}{P(M_{13})} = \frac{\frac{1}{6}}{\frac{1}{2}} = \frac{1}{3}$$

Ako je igrač odabrao vrata 1, a Monty vrata 3 i ako se igrač drži svoje odluke (ne želi je promijeniti), prethodni izračun pokazuje da je vjerojatnost da osvoji nagradu $\frac{1}{3}$. Što se događa ako odluči promijeniti odluku, pa na kraju odabere vrata broj 2? Da bismo odgovorili na to pitanje, trebamo odrediti kolika je vjerojatnost da se nagrada nalazi iza vrata broj 2 ako je nastupio događaj M_{13}. Do ove vjerojatnosti možemo doći jednostavno, opet se pozivajući na činjenicu da $\{N_1, N_2, N_3\}$ čini particiju (jedan od njih se sigurno morao dogoditi i oni su međusobno disjunktni), pa je tada:

$$P(N_1|M_{13}) + P(N_2|M_{13}) + P(N_3|M_{13}) = 1.$$

Posljednja vjerojatnost mora biti 0 jer je Monty otvorio ta vrata i pokazao nam je da tamo nema nagrade: $P(N_3|M_{13}) = 0$; maloprije smo izračunali $P(N_1|M_{13}) = \frac{1}{3}$. Slijedi da je preostala vjerojatnost:

$$P(N_2|M_{13}) = 1 - P(N_1|M_{13}) - P(N_3|M_{13}) = 1 - \frac{1}{3} - 0 = \frac{2}{3}$$

odnosno ako igrač promijeni mišljenje pa na kraju ipak odabere vrata broj 2, ima dvostruko veću vjerojatnost pobjede no ako se drži početnog izbora.

Malo drugačije rješenje

Pažljivog čitatelja možda može zbuniti semantika događaja M_{13} posebice u kontekstu uvjetne vjerojatnosti: $P(M_{13}|N_1)$. Nekako se čini da imamo dvije razine "ako" skrivene u ovoj vjerojatnosti ako želimo ovome pridijeliti $\frac{1}{2}$ kao što smo to učinili u prethodnom izvodu. Prva razina je ona iz same uvjetne vjerojatnosti: ako znamo da je nastupio N_1, kolika je vjerojatnost pojave događaja M_{13}. No naš odgovor na ovo pitanje je bio: "ako dodatno pretpostavimo da je igrač odabrao vrata broj jedan", kolika je onda vjerojatnost da Monty otvara broj 3. Želimo li malo čišće razmatranje, onda trebamo pogledati koji su sve događaji mogući, ako je nastupio N_1. A to su

redom: $\{M_{12}, M_{13}, M_{23}, M_{32}\}$. Tehnički, mogli bismo razmotriti i M_{21} i slične, ali ako je nastupio N_1, onda su vjerojatnosti ovih događaja jednake 0. Pa sada ako smo svjesni da imamo četiri moguća kandidata: $\{M_{12}, M_{13}, M_{23}, M_{32}\}$, stojimo li i dalje pri tvrdnji da je vjerojatnost $M_{13}|N_1$ jednaka $\frac{1}{2}$? Razmatranje koje smo prethodno proveli zanemarilo je ovu dvostruku razinu uvjeta, što nas na sreću nije "opeklo" jer račun mijenja za faktor koji se kasnije pokrati. No račun možemo provesti i potpuno egzaktno.

Za potrebe toga, malo ćemo redefinirati korištene oznake i uvesti jednu pomoćnu. Primjetimo da imamo tri vrste događaja: gdje je nagrada, što početno bira igrač te što otvara Monty. Pa idemo redom.

- Neka N_i označava da je nagrada smještena iza vrata i, gdje je $i \in \{1,2,3\}$.
- Neka I_j označava da je igrač početno odabrao vrata j, gdje je $j \in \{1,2,3\}$.
- Neka M_k označava da je Monty otvorio vrata k, gdje je $k \in \{1,2,3\}$.

Zanima nas isto što smo razmatrali prije: ako je igrač odabrao vrata 1, a Monty otvorio vrata 3, kolika je vjerojatnost da je nagrada iza vrata 1 (tj. $P(N_1|I_1,M_3)$) odnosno iza vrata 2 (tj. $P(N_2|I_1,M_3)$)?

Prisjetimo se da je Bayesov teorem zapravo izveden iz zapisa vjerojatnosti pojave združenog događaja preko uvjetne vjerojatnosti događaja. Imamo li tri događaja A, B i C, vjerojatnost njihova nastupanja možemo raspisati na mnoštvo načina preko uvjetnih vjerojatnosti:

$$\begin{aligned} P(A,B,C) &= P(A,B|C)\cdot P(C) \\ &= P(A,C|B)\cdot P(B) \\ &= P(B,C|A)\cdot P(A) \\ &= P(A|B,C)\cdot P(B,C) \\ &= P(B|A,C)\cdot P(A,C) \\ &= P(C|A,B)\cdot P(A,B) \end{aligned}$$

Tako primjerice možemo pisati:

$$P(N_1,I_1,M_3) = P(N_1|I_1,M_3)\cdot P(I_1,M_3) = P(M_3|N_1,I_1)\cdot P(N_1,I_1)$$

pa iz desnog dijela izraza slijedi jedan oblik Bayesovog teorema:

$$P(N_1|I_1,M_3) = \frac{P(M_3|N_1,I_1)\cdot P(N_1,I_1)}{P(I_1,M_3)}$$

Da bismo to odredili, trebaju nam vjerojatnosti oblika $P(N_i,I_j)$. Primijetimo da s obzirom da je razmještaj nagrade nezavisan od početnog izbora igrača, sigurno vrijedi:

$$P(N_i,I_j) = P(N_i)\cdot P(I_j).$$

Također, kako postoje 3 vrata i izbori su potpuno slučajni, vrijedi: $P(N_1) = P(N_2) = P(N_3) = \frac{1}{3}$ te $P(I_1) = P(I_2) = P(I_3) = \frac{1}{3}$. Stoga vrijedi i da je:

$$P(N_i,I_j) = \frac{1}{3}\cdot\frac{1}{3} = \frac{1}{9} \forall i \in \{1,2,3\}, \forall j \in \{1,2,3\}.$$

Prva vjerojatnost u brojniku sada je sigurno jednaka $\frac{1}{2}$: pitamo se ako su nastupili događaji N_1 i I_1, kolika je vjerojatnost događaja M_3: pod ovim uvjetima Monty može otvoriti ili vrata broj 2 ili vrata broj 3, i to radi s jednakom vjerojatnošću, pa je vjerojatnost za otvaranje svakih od njih upravo $\frac{1}{2}$.

Konačno, ostalo nam je izračunati vjerojatnost u nazivniku. Najprije ćemo je raspisati u sumu vjerojatnosti združenih događaja s elementima particije $\{N_1, N_2, N_3\}$, a potom ćemo to dalje razriješiti preko uvjetnih vjerojatnosti koje ćemo znati odrediti. Evo izračuna:

$$\begin{aligned} P(I_1, M_3) &= P(I_1, M_3, N_1) + P(I_1, M_3, N_2) + P(I_1, M_3, N_3) \\ &= P(M_3|I_1, N_1) \cdot P(I_1, N_1) + P(M_3|I_1, N_2) \cdot P(I_1, N_2) + P(M_3|I_1, N_3) \cdot P(I_1, N_3) \\ &= \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{9} + 1 \cdot \frac{1}{9} + 0 \cdot \frac{1}{9} \\ &= \frac{1}{6} \end{aligned}$$

Time možemo izračunati i traženu vjerojatnost:

$$P(N_1|I_1, M_3) = \frac{P(M_3|N_1, I_1) \cdot P(N_1, I_1)}{P(I_1, M_3)} = \frac{\frac{1}{2} \cdot \frac{1}{9}}{\frac{1}{6}} = \frac{1}{3}$$

Vjerojatnost da je nagrada iza vrata 2 je:

$$P(N_2|I_1, M_3) = \frac{P(M_3|N_2, I_1) \cdot P(N_2, I_1)}{P(I_1, M_3)} = \frac{1 \cdot \frac{1}{9}}{\frac{1}{6}} = \frac{2}{3}$$

Alternativno, nakon što smo izračunali prvu traženu vjerojatnost, drugu smo mogli dobiti i iz:

$$P(N_1|I_1, M_3) + P(N_2|I_1, M_3) + P(N_3|I_1, M_3) = 1$$

pa slijedi:

$$P(N_2|I_1, M_3) = 1 - P(N_1|I_1, M_3) - P(N_3|I_1, M_3) = 1 - \frac{1}{3} - 0 = \frac{2}{3}.$$

3. Neizraziti skupovi i neizrazita logika

U stvarnom životu, podatci su često neprecizni, a granice zasivljene - svijet nije crno-bijeli. Primjera koji ovo ilustriraju ima beskonačno mnogo. Pa razmotrimo koncept: "bogat čovjek". Razmotrimo li plaće koje na mjesečnoj razini dobivaju ljudi za svoj posao u Republici Hrvatskoj, mogli bismo na temelju tog podatka pokušati definirati što znači da je čovjek *bogat*. Je li to onaj koji mjesečno dobiva 2000 kn? Zacijelo ne. A onaj koji dobiva 20000 kn? Tu ćemo se vjerojatno složiti da je odgovor potvrdan. No gdje je granica? 18742 kn i 93 lipe? Ako je to istina, možemo li mirne savjesti reći da osoba koja prima mjesečnu plaću od 18742 kn i 92 lipe ne pripada grupi bogatih ljudi? A onaj koji dobiva 1 kunu manje? A onaj koji dobiva 500 kuna manje?

Evo još jednog poznatog primjera: *Koliko zrna pijeska čine gomilu?* Svi ćemo se složiti da jedno, dva, pet ili čak pedeset zrna pijeska ne čine gomilu. No milijun zrna to čini. Gdje je granica? Koliko je zrna pijeska dovoljno da bismo ih zvali gomilom? I zar jedno zrno pijeska manje doista to mijenja?

Situacije koje su ovdje opisane, uobičajene su u stvarnom životu, i predstavljaju izazov na koji klasična logika odnosno klasična teorija skupova nemaju adekvatan odgovor. Ti formalizmi naprosto nisu prikladni za modeliranje ovakvih koncepata na način koji odgovara onome kako ljudi razmišljaju o njima.

3.1 Neizraziti skupovi

Neizraziti skupovi odnosno neizrazita logika predstavljaju formalizme koji su razvijeni upravo kako bi se omogućilo modeliranje opisanih koncepata gdje su granice "meke". Neizrazita logika također je nastala i kao pokušaj da se omogući *računanje s riječima*; drugim riječima, da možemo graditi tehničke sustave u kojima su pravila izrečena riječima (primjerice, "ako je razina vode vrlo visoka, onda ...), i u kojima je potom moguće raditi zaključivanje na temelju predanih ulaznih podataka koji mogu biti egzaktni (izmjerena visina koja je apsolutno točna) ili neprecizni (izmjerena visina ali za koju smo "okvirno" sigurni koliko iznosi i znamo primjerice kolika je tipična pogreška koju senzor koji je obavio mjerenje može unijeti).

Vratimo li se na primjer koji smo dali u uvodnom dijelu, a koji se odnosi na sustav koji upravlja branom, u pravilima na temelju kojih takav sustav radi mogli bismo zateći pravila u kojima se

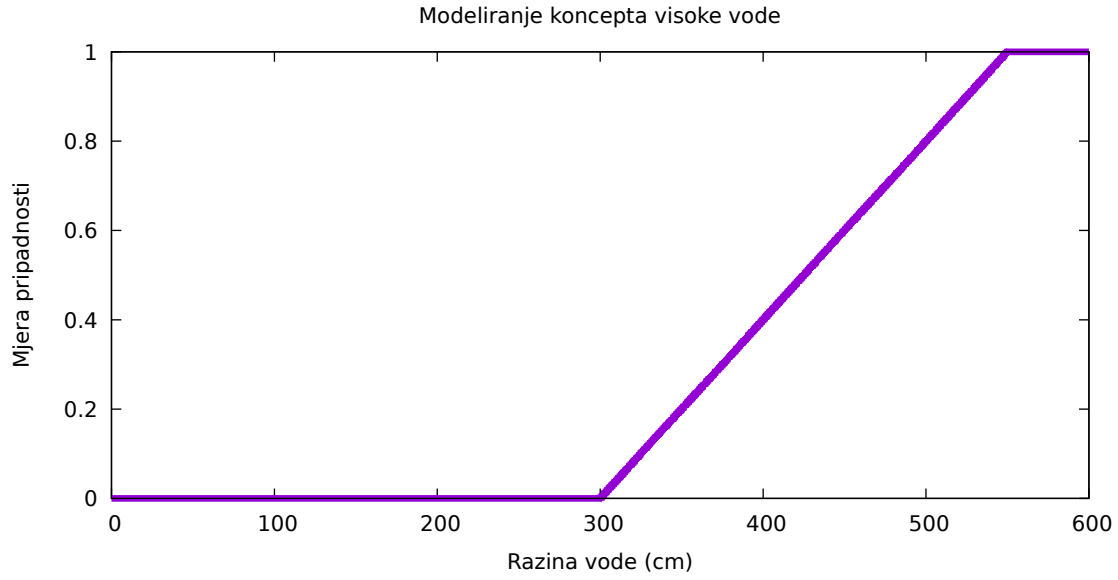
spominje:

- ako je razina vode *visoka*
- ako razina vode *nije visoka*
- ako je razina vode *niska*
- ako je razina vode *osrednja*
- ako je razina vode *vrlo visoka*
- ako je razina vode *osrednja ili visoka*
- ...

Termini koji su prikazani ukošeno predstavljaju *jezične izraze* koji za operatera brane imaju određeno značenje. Ti termini mogu biti osnovni termini (*visoka*, *osrednja*, *niska*) ili pak izvedeni termini koji se dobivaju primjenom određenih jezičnih modifikatora (poput *vrlo*) odnosno primjenom operatora kombiniranja (poput *ili*) i koji svoje značenje izvode iz značenja osnovnih jezičnih izraza na temelju kojih su izgrađeni.

Pogledajmo sada pobliže primjer koncepta: *visoka razina vode*. Kako je visina brane 6 metara, naveli smo u uvodnom razmatranju da su sve visine od 550 cm na više kompatibilne s tim konceptom. No pitate li operatera brane, on će Vam vrlo vjerojatno reći i da je visina od 520 cm već poprilično visoka. Čak i visina od 450 cm, iako ona nije toliko zabrinjavajuća kao što je ona od 520 cm, ili ona od 550 cm. S druge strane, za visinu 300 cm reći će nam da ta definitivno nije visoka razina.

Ovakvo razmišljanje o modeliranju istinitosti propozicija poput "Voda razine 520 cm je voda visoke razine", odnosno modeliranja pripadnosti skupu "voda čija ja razina visoka" navodi nas da umjesto strogih i izrazitih, jasnih granica (propozicija je istinita vs propozicija je lažna; voda pripada skupu vs voda ne pripada skupu) uvedemo meke granice odnosno stupnjevanje istinitosti odnosno pripadnosti. I to je upravo ono što neizrazita logika odnosno teorija neizrazitih skupova čini: umjesto da istinitost propozicije definira podatkom iz skupa $\{0,1\}$, definira je podatkom iz skupa $[0,1]$; umjesto da mjeru pripadnosti elementa skupu definira podatkom iz skupa $\{0,1\}$, definira je podatkom iz skupa $[0,1]$. Drugim riječima, neizrazita logika omogućava nam da kažemo u kojoj je *mjeri* promatrana propozicija istinita, i ta mjera može biti 0 (propozicija je lažna), može biti 1 (propozicija je istinita), ali može biti i primjerice 0.8 ili 0.3, ili bilo koji realni broj između 0 i 1.



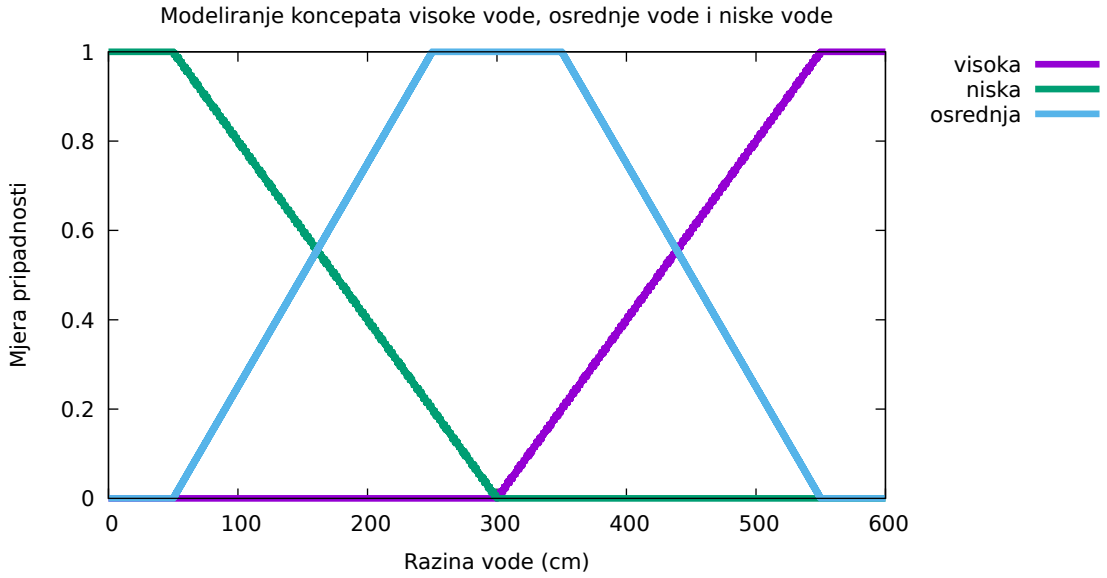
Slika 3.1: Modeliranje neizrazitog skupa *Voda visoke razine*.

U tom smislu, pripadnost neke razine vode skupu voda visoke razine mogli bismo definirati kako je grafički prikazano na slici 3.1.

Neizrazit skup definirali smo nad univerzalnim skupom visina mjerenih u centimetrima - to je klasični skup čiji su elementi primjerice nenegativni cijeli brojevi iz intervala 0 do 600. Svakom od tih elemenata univerzalnog skupa (dakle svakoj visini) pridijelili smo mjeru (realan broj iz intervala $[0,1]$) koja govori koliko je taj element (ta visina) kompatibilan s konceptom koji opisuje neizraziti skup ("voda visoke razine"). Tako vidimo da za sve visine koje su 300 cm ili manje tvrdimo da one nisu kompatibilne s konceptom "voda visoke razine" odnosno da ne pripadaju tom neizrazitom skupu. Za sve visine koje su 550 cm ili veće tvrdimo da su one skroz kompatibilne s konceptom "voda visoke razine" odnosno da apsolutno pripadaju tom neizrazitom skupu. Konačno, za vode čije su razine između 300 cm i 550 cm tvrdimo neizrazitom skupu pripadaju u određenoj mjeri, odnosno da je njihova kompatibilnost s modeliranim konceptom to veća što je visina bliža visini od 550 cm, i dodatno, da se ta mjera kompatibilnosti mijenja linearno.

Je li prikazana definicija jedina moguća? Odgovor je naravno - ne. Kako ćemo modelirati koncept "voda visoke razine" krajnje je subjektivan, kontekstno zavisan i ovisi o onome tko radi modeliranje: koje su granice, kako se mijenja mjera pripadnosti, je li ova funkcija definirana po dijelovima (kao što je to bio slučaj kod nas) ili nije; sve su to odluke koje je potrebno donijeti u trenutku modeliranja. No točna definicija vrlo često nije niti presudna za rad sustava koji se razvija; ono što je bitno su odnosi između modeliranih koncepata (jer nemojmo zaboraviti da ovdje imamo i "vode osrednje razine" te "vode niske razine".

Slika 3.2 prikazuje jednu moguću definiciju svih triju koncepata.



Slika 3.2: Modeliranje neizrazitih skupova *Voda visoke razine*, *Voda osrednje razine* i *Voda niske razine*.

Sada smo konačno spremni dati i formalnu definiciju neizrazitog skupa.

Definicija 3.1 — Neizraziti skup.
Neka je U klasični univerzalni skup. *Neizraziti skup* A definiran nad univerzalnim skupom U jest skup uređenih parova $\{(x, \mu_A(x)) \mid x \in U,\ \mu_A(x) \in [0,1]\}$. Funkciju $\mu_A(x)$ nazivamo *funkcijom pripadnosti* (engl. *membership function*) i ona određuje mjeru u kojoj elementi univerzalnog

skupa U pripadaju neizrazitom skupu A.

Primijetimo: neizraziti skup je skup uređenih parova koje čine elementi iz univerzalnog skupa te mjere pripadnosti kojima ti elementi pripadaju neizrazitom skupu.

Osvrnimo se ovdje na još jedan detalj koji često zbunjuje ljude koji se po prvi puta susretnu s teorijom neizrazitih skupova, a koji predstavlja fundamentalnu razliku između ove teorije, i teorije koja na prvi pogled djeluje vrlo slično - teorije koja svakom elementu univerzalnog skupa također pridjeljuje realni broj iz intervala $[0,1]$, i koja se zove teorija vjerojatnosti. Fundamentalna razlika između njih jest u značenju pridijeljnog broja. Ako nekom elementu x iz univerzalnog skupa U pridijelimo vjerojatnost 0.5, tada je x neki događaj, a broj 0.5 označava vjerojatnost da se događaj dogodi. S druge strane, ako nekom elementu x iz univerzalnog skupa U pridijelimo mjeru pripadnosti 0.5, time modeliramo činjenicu da je mjera kompatibilnosti elementa x s nekim konceptom jednaka 0.5. Ovo ćemo najjednostavnije ilustrirati na dva primjera.

Primjer 1. Ako za neku školu znamo da je vjerojatnost da vrijedi tvrdnja "prema prosječnoj visini studenata, škola spada u škole s visokim studentima" jednaka 0.5, kakvu informaciju time imamo, odnosno što smo modelirali? S obzirom da govorimo o vjerojatnosti, tada je doista moguće da su većina studenata te škole dvometraši, i da škola stvarno ima populaciju visokih studenata. No moguće je i sasvim obrnuto: da je prosječna visina studenata škole jednaka 150 cm, i time škola definitivno ne spada u škole visokih studenata. S druge strane, ako znamo da je mjera pripadnosti škole "školama koje prema prosječnoj visini studenata spadaju u škole s visokim studentima" jednaka 0.5, što smo tada modelirali? Sada znamo da je nemoguće da je prosječna visina studenata u toj školi 150 cm jer tada bi mjera pripadnosti škole navedenom konceptu bila 0. Također znamo da prosječni student te škole sigurno nije dvometraš, jer bi tada mjera pripadnosti škole navedenom konceptu bila 1. Stoga na temelju dane informacije možemo okvirno zaključiti nekakav raspod visina u kojem možemo očekivati da se kreće prosječni student.

Primjer 2. Šećete pustinjom već dva dana, bez hrane i vode, pod užeglim suncem. I pronalazite sanduk s dvije boce vode. Na jednoj piše: "Pitka tekućina" $p = 0.5$, na drugoj piše $\mu_{pitkatekuina} = 0.5$. Koju ćete bocu otvoriti i popiti i zašto? Razmotrimo što nam govori informacija na prvoj boci: vjerojatnost da je u boci pitka tekućina je 50% - to znači da je unutra možda kristalno čista voda iz bistrog potoka ohlađena na ugodnih 18 stupnjeva, a možda je unutra sumporna kiselina. Sve što nam je dano jest vjerojatnost navedenog događaja. Kakva je situacija s drugom bocom? Tamo nam je dana mjera pripadnosti tekućine u boci "pitkim tekućinama". Uočite, kako ona nije 0, tekućina sigurno nije otrovna, pa shodno tome, sigurno nije sumporna kiselina. S obzirom na danu mjeru, možemo zaključiti i da nije kristalno čista voda iz bistrog potoka ohlađena na ugodnih 18 stupnjeva, ali možda jest relativno ustajala voda ne baš bajnog okusa i svježine, no i dalje jest tekućina koja nam neće naškoditi.

Iz danih primjera sada bi trebala biti jasna i fundamentalna razika između teorije vjerojatnosti i teorije neizrazitih skupova, odnosno što modelira jedna, a što druga. Obje se bave modeliranjem neizvjesnosti, ali im je fokus na različitim aspektima neizvjesnosti.

3.2 Jezična varijabla

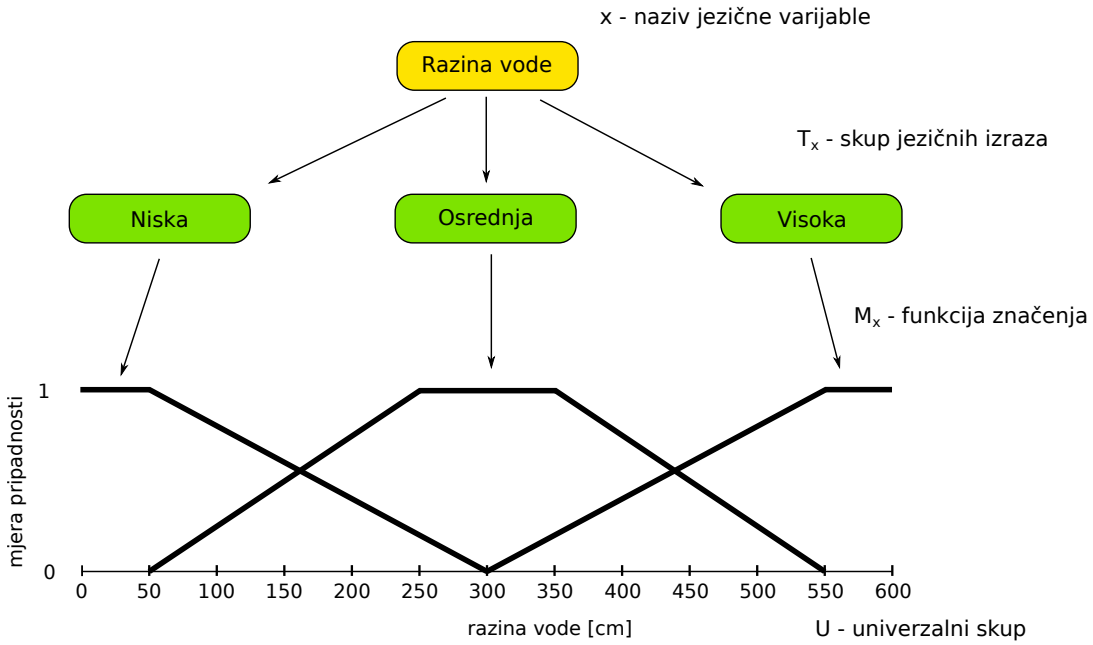
Jezična varijabla formalni je model proširenja koncepta varijable na teoriju neizrazitih skupova. U klasičnim programskim jezicima koji su strogo tipizirani, kada definiramo varijablu, definiramo i njezin tip. Primjerice, napišemo li u C-u deklaraciju `unsigned char c;` definirali smo varijablu čije su vrijednosti cijeli brojevi iz intervala 0 do 255.

Jezična varijabla je varijabla koja poprima vrijednosti koje su opisane riječima. Prisjetimo se već prethodno danog primjera razine vode, i vrijednosti koje je takva varijable mogla poprimati: *visoka*, *osrednja*, *visoka*, *ne visoka*, *vrlo visoka*, *osrednja ili visoka*, ... Formalno, da bismo definirali jezičnu varijablu, trebamo definirati pet sastavnih elemenata.

Definicija 3.2 — Jezična varijabla.
Jezična varijabla je uređena petorka (x, T_x, U, G, M_x) gdje su elementi redom:

- x je naziv jezične varijable
- T_x je skup osnovnih jezičnih izraza koje varijabla može poprimiti te svih jezičnih izraza koji se mogu iz njih generirati (engl. *term set*),
- U je univerzalni skup odnosno stvarna fizička domena nad kojom će biti definirano značenje osnovnih jezičnih izraza (engl. *universe of discourse*),
- G je gramatika koja specificira pravila stvaranja složenijih jezičnih izraza uporabom jezičnih modifikatora, jezičnih veznika i osnovnih jezičnih izraza (engl. *grammar*),
- M_x je funkcija koja svakom jezičnom izrazu pridjeljuje njegovo značenje u smislu da jezičnom izrazu pridružuje neizraziti skup koji odgovara konceptu koji predstavlja jezični izraz (engl. *meaning function*).

Slika 3.3 prikazuje četiri od 5 navedenih elemenata na primjeru jezične varijable *Razina vode*.



Slika 3.3: Jezična varijabla *Razina vode*.

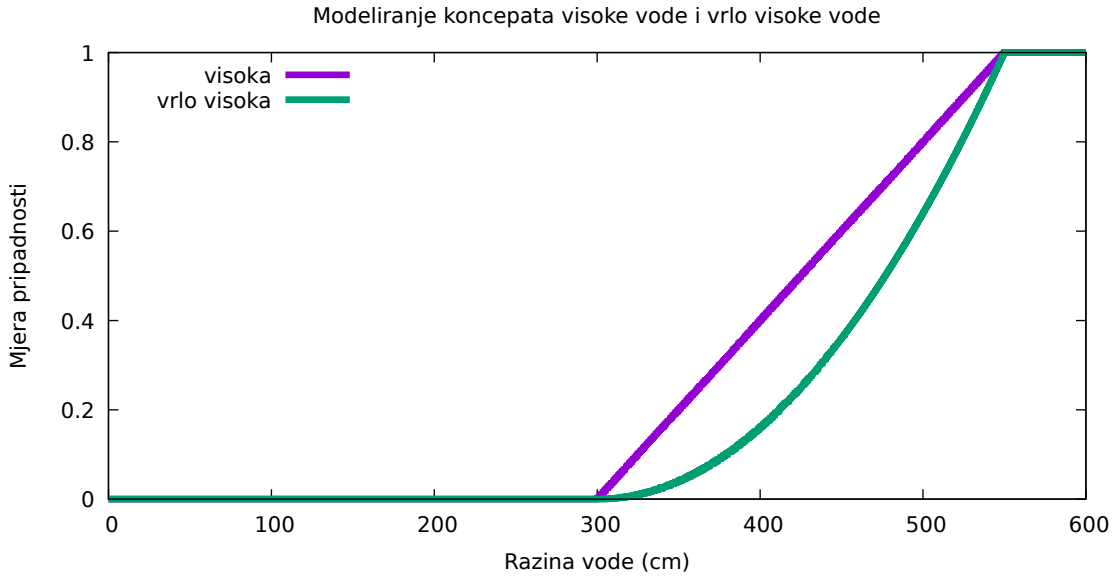
Za vježbu Definirajte sljedeće jezične varijable: starosna dob, uspjeh studenta, brzina kretanja vozila, mjesečni prihodi osobe. Pri tome slobodno zanemarite formalnu specifikaciju gramatike, ali razmislite o sva preostala četiri elementa.

3.3 Jezični modifikatori

Jezični modifikatori omogućavaju da se na temelju određenog jezičnog izraza definira novi jezični izraz koji opisuje koncept koji je određena modifikacija početnog. Primjerice, jezični modifikator "vrlo" zahtjeva strože podudaranje elemenata s osnovnim modeliranim konceptom, dok jezični modifikator "manje-više" dopušta i "labavije" podudaranje elemenata s osnovnim modeliranim konceptom. Pogledajmo ih redom.

Definicija 3.3 — Jezični modifikator "vrlo".
Jezični modifikator "vrlo" modeliran je operatorom koncentracije. Neka je A neizraziti skup $A = \{(x, \mu_A(x)) \mid x \in U,\ \mu_A(x) \in [0,1]\}$. **Koncentracija** $\mathrm{Con}(A)$ je novi neizraziti skup u kojem je mjera pripadnosti elementa x jednaka kvadratu mjere pripadnosti kojom element pripada neizrazitom skupu A, odnosno $\mathrm{Con}(A) = \{(x, \mu_{\mathrm{Con}(A)}(x)) \mid x \in U,\ \mu_{\mathrm{Con}(A)}(x) = \mu_A(x)^2\}$.

Djelovanje jezičnog modifikatora *vrlo* prikazano je na slici 3.4.

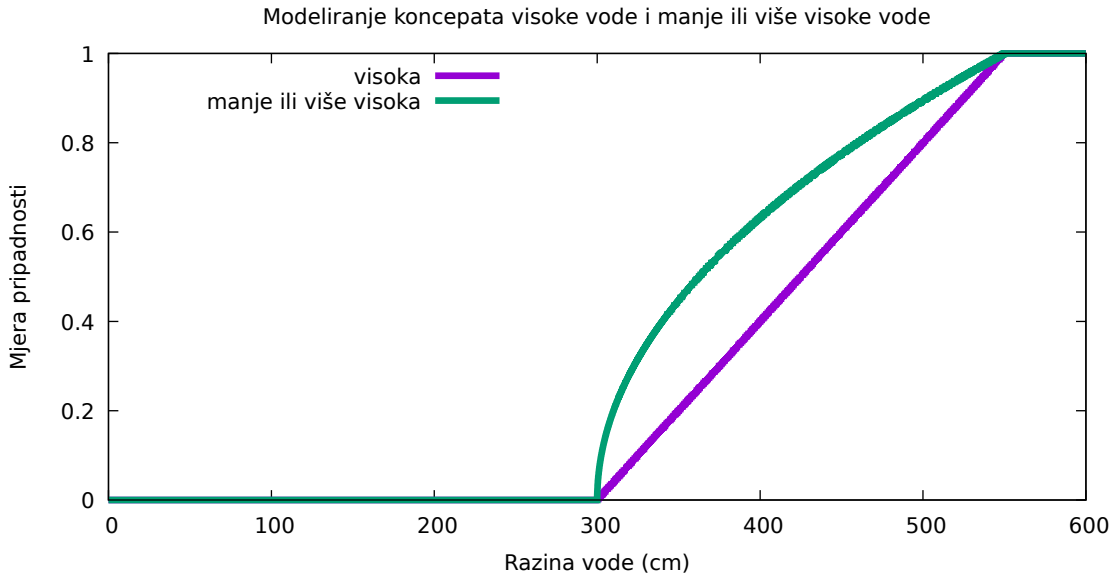


Slika 3.4: Jezični modifikator *vrlo*.

Primijetite kako jezični modifikator *vrlo* ne pomiče granice - to mu nije namjena. Naime, možda bismo na prvu mogli razmišljati ovako: ako smo rekli da je donja granica da bi razina vode pripadala u visoke vode 550 cm, onda bismo koncept "vrlo visoke vode" mogli definirati tako da mu donja granica bude stroža, odnosno mogli bismo tražiti da je za jediničnu pripadnost ovom novom konceptu potrebna visina koja je primjerice barem 570 cm. No to nije ono što jezični modifikator *vrlo* radi. Ako neki element ne pripada osnovnom konceptu, neće pripadati niti konceptu dobivenom primjenom modifikatora *vrlo*. Također, ako neki element apsolutno pripada osnovnom konceptu, apsolutno će pripadati i konceptu dobivenom primjenom modifikatora *vrlo*. Mjesto na koje operator *vrlo* djeluje je ono sivo područje između. Pogledajte primjerice na slici 3.4 definiciju neizrazitog skupa *visoka razina*, i uočite da smo definirali da razina vode od 425 cm ima mjeru pripadnosti (odnosno kompatibilnost podudaranja s modeliranim konceptom) od $\frac{1}{2}$. Ta ista visina neizrazitom skupu *vrlo visoka razina* pripada mjerom od samo $\frac{1}{4}$ - taj je element manje kompatibilan s postroženom definicijom odnosno s našim novim konceptom.

Definicija 3.4 — Jezični modifikator "manje ili više".
Jezični modifikator "manje ili više" modeliran je operatorom dilatacije. Neka je A neizraziti skup $A = \{(x, \mu_A(x)) \mid x \in U,\ \mu_A(x) \in [0,1]\}$. **Dilatacija** $\mathrm{Dil}(A)$ je novi neizraziti skup u kojem je mjera pripadnosti elementa x jednaka korijenu mjere pripadnosti kojom element pripada neizrazitom skupu A, odnosno $\mathrm{Dil}(A) = \{(x, \mu_{\mathrm{Dil}(A)}(x)) \mid x \in U,\ \mu_{\mathrm{Dil}(A)}(x) = \sqrt{\mu_A(x)}\}$.

Djelovanje jezičnog modifikatora *manje ili više* prikazano je na slici 3.5.



Slika 3.5: Jezični modifikator *manje ili više*.

Primijetite kako niti jezični modifikator *manje ili više* ne pomiče granice: ako nešto uopće nije bilo kompatibilno s osnovnim konceptom ili je bilo maksimalno kompatibilno s osnovnim konceptom, u istoj će mjeri ostati kompatibilno s novo-modeliranim konceptom. I ovaj modifikator djeluje na sivu zonu, pa je tako primjerice mjera kompatifilnosti visine od 425 cm s konceptom *visoka razina* jednaka 0.5, dok je mjera kompatifilnosti te iste visine s konceptom *manje ili više visoka razina* jednaka čak 0.707; modifikator je "olabavio" jakost osnovnog koncepta pa mu elementi pripadaju većom mjerom pripadnosti no što su to činili kod osnovnog koncepta.

3.4 Povezanost teorije neizrazitih skupova i neizrazite logike

U uvodnom razmatranju već smo se dotakli pojmova: teorija neizrazitih skupova te neizrazita logika.

- Teorija neizrazitih skupova klasičnu teoriju skupova kod koje *indikatorsku funkciju* koja prima element domene nad kojom je definiran skup i vraća 0 ako element ne pripada skupu odnosno 1 ako pripada zamjenjuje *funkcijom pripadnosti* koja vraća mjeru u kojoj element pripada skupu, i može biti bilo koji realni broj iz intervala $[0,1]$. S obzirom da skupove uobičajeno definiramo tako da njega čine oni elementi koji su "usklađeni" s nekim konceptom, u teoriji neizrazitih skupova možemo na funkciju pripadnosti gledati na funkciju koja nam govori u kojoj je mjeri element domene kompatibilan s modeliranim konceptom.
- Neizrazita logika klasičnu logiku prvog reda proširuje na način da vrijednosti istinitosti više nisu isključivo $\bot$ i $\top$ (odnosno 0 i 1) već se modelira mjera istinitosti, kao realni broj iz intervala $[0,1]$. Isto vrijedi i za predikate: oni za predani element domene (ili n-torku elemenata ako se radi o n-arnom predikatu) više ne vraćaju isključivo 0 ili 1, već vraćaju mjeru u kojoj predani ulaz zadovoljava koncept koji modelira predikat.

Ilustrirajmo ovo na primjeru. Pretpostavimo da je A neizraziti skup definiran nad podskupom realnih brojeva $[1,5]$ koji modelira koncept *Izvrstan student* na sljedeći način: svaki student čija je prosječna ocjena manja od 4 nije izvrstan student; svaki studenti čija je prosječna ocjena veća ili jednaka 4,5 jest izvrstan student; studenti čije su prosječne ocjene između 4 i 4,5 to više pripadaju ovom skupu što im je prosječna ocjena bliža ocjeni 4,5 i ta se mjera linearno mijenja od 0 do 1. Na

opisani način definirali smo neizraziti skup.

Pogledajmo sada slično ali kroz prizmu logike. Razmatramo neizraziti predikat *Izvrstan(x)* gdje je *x* prosječna ocjena studenta. Ovaj nam neizraziti predikat za svaku prosječnu ocjenu treba vratiti mjeru istinitosti tvrdnje da je osoba koja ima prosječnu ocjenu *x* izvrstan student. Neka ovaj neizraziti predikat za svaku prosječnu ocjenu studenta manju od 4 vraća mjeru istinitosti 0; neka za svaku prosječnu ocjenu studenta veću ili jednaku 4,5 vraća mjeru istinitosti 1; neka za svaku prosječnu ocjenu studenta između 4 i 4,5 vraća to veću mjeru istinitosti što je prosječna ocjena bliža ocjeni 4,5 i neka se ta mjera linearno mijenja od 0 do 1. Na opisani način definirali smo neizraziti predikat. Slično bismo mogli napraviti i s proširenjem propozicija, poput: "*Student čija je prosječna ocjena 4,2 jest izvrstan student*".

Razmotrimo li pažljivo oba primjera, uočit ćemo da se zapravo radi o ekvivalentnim modelima. U tom smislu, teorija neizrazitih skupova koja daje skupistički pogled na svijet i omogućava da se nad neizrazitim skupovima obavljaju operacije poput komplementa neizrazitog skupa, unije i presjeka neizrazitih skupova i slično, te neizrazita logika koja problemu pristupa s logičke perspektive i omogućava modeliranje mjere istinitosti propozicija i predikata, te omoguća provođenje logičkih operacija poput negacije, disjunkcije i konjunkcije zapravo predstavljaju dva ekvivalentna pogleda na stvarnost.

Uz danu definiciju neizrazitog skupa koji modelira koncept *Izvrstan student* možemo se pitati u kojoj mjeri neke od prosječnih ocjena pripadaju tom skupu.

- Prosječna ocjena 3? Neizrazitom skupu pripada mjerom 0.
- Prosječna ocjena 4,2? Neizrazitom skupu pripada mjerom 0,4.
- Prosječna ocjena 4,4? Neizrazitom skupu pripada mjerom 0,8.
- Prosječna ocjena 4,8? Neizrazitom skupu pripada mjerom 1.

Slično, možemo razmotriti nekoliko propozicija.

- Mjera istinitosti propozicije "*Student čija je prosječna ocjena 3 jest izvrstan student*" je 0.
- Mjera istinitosti propozicije "*Student čija je prosječna ocjena 4,2 jest izvrstan student*" je 0,4.
- Mjera istinitosti propozicije "*Student čija je prosječna ocjena 4,4 jest izvrstan student*" je 0,8.
- Mjera istinitosti propozicije "*Student čija je prosječna ocjena 4,8 jest izvrstan student*" je 1.

3.5 Operacije nad neizrazitim skupovima

Nakon što smo definirali koncept neizrazitog skupa, pogledajmo kako ćemo nad njima obavljati osnovne skupovne operacije: komplement, presjek te uniju. Teorija neizrazitih skupova na ovom mjestu je vrlo fleksibilna, odnosno nudi beskonačno mnogo načina na koje ovo možemo napraviti, a koji zadovoljavaju određena ograničenja. U okviru ovog kolegija nećemo ulaziti u formalnu specifikaciju ovih operacija odnosno ograničenja koja moraju zadovoljiti da bismo naše definicije smjeli zvati komplementom, presjekom odnosno unijom - za to postoje kolegiji na višim godinama na kojima ćete moći dobiti te detalje.

Umjesto toga, ovdje ćemo samo spomenuti da se sve definicije komplementa, presjeka i unije u situacijama kada razmatramo restrikciju na klasičnu teoriju skupova (odnosno kada razmatramo što se događa s elementima čija je mjera pripadnosti skupu ili 0 ili 1) moraju ponašati upravo onako kako se ponaša i klasična teorija skupova. To pak znači da ćemo razlike u ponašanju moći opaziti samo u slučajevima kada smo u "sivoj zoni" - odnosno kada razmatramo djelovanje na elemente čija je mjera pripadnosti skupu veća od 0 i manja od 1.

U okviru ovog kolegija, ponudit ćemo isključivo definicije koje je ponudio Lotfi A. Zadeh - utemeljitelj teorije neizrazitih skupova, i koje su i intuitivno najjednostavnije.

Definicija 3.5 — Neizrazite operacije.
Neka je U klasični univerzalni skup i neka su nad njim definirana dva neizrazita skupa A i B kao $A = \{(x, \mu_A(x)) \mid x \in U,\ \mu_A(x) \in [0,1]\}$ te $B = \{(x, \mu_B(x)) \mid x \in U,\ \mu_B(x) \in [0,1]\}$. Zadehove definicije komplementa, presjeka i unije tada su sljedeće.

- Komplement neizrazitog skupa A definiran je kao

$$A^C = \{(x, \mu_{A^C}(x)) \mid x \in U,\ \mu_{A^C}(x) = 1 - \mu_A(x)\}.$$

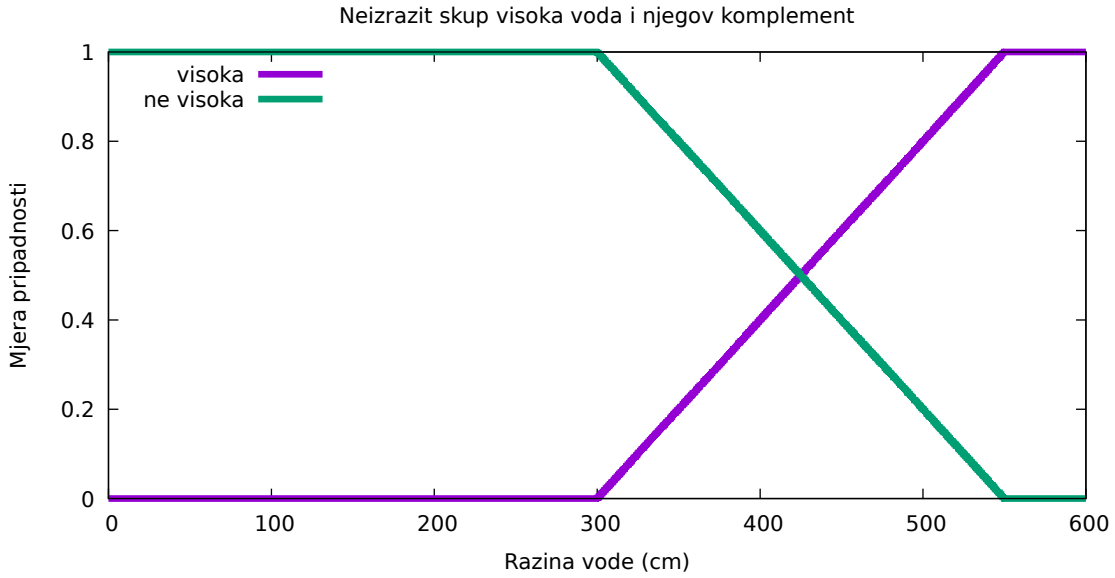
- Presjek neizrazitih skupova A i B definiran je kao

$$A \cap B = \{(x, \mu_{A\cap B}(x)) \mid x \in U,\ \mu_{A\cap B}(x) = \min(\mu_A(x), \mu_B(x))\}.$$

- Unija neizrazitih skupova A i B definirana je kao

$$A \cup B = \{(x, \mu_{A\cup B}(x)) \mid x \in U,\ \mu_{A\cup B}(x) = \max(\mu_A(x), \mu_B(x))\}.$$

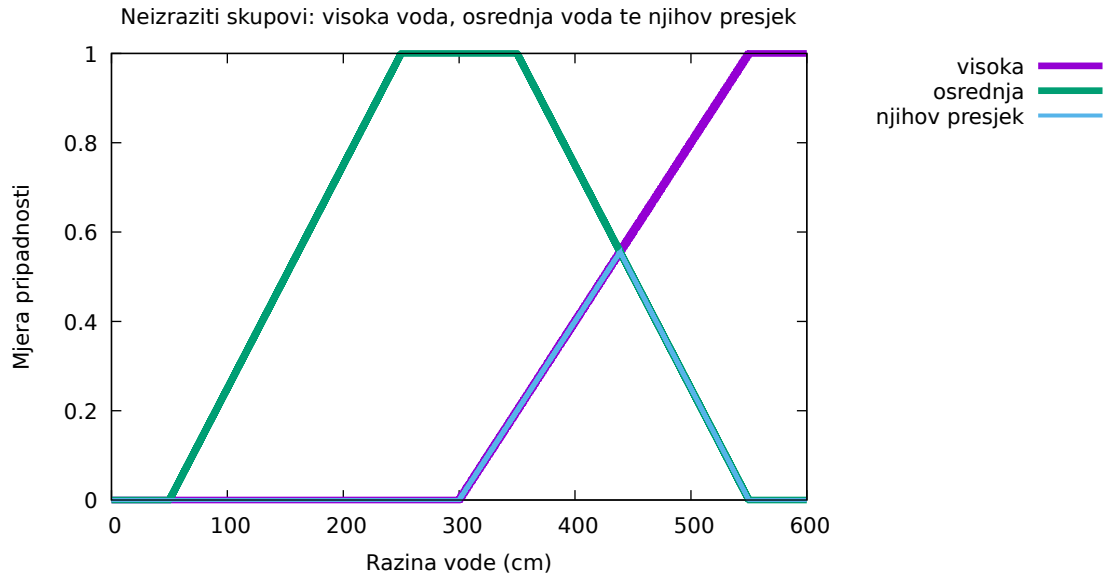
Neizrazit skup *visoka voda* te njegov komplement prikazani su na slici 3.6. Primijetite kako sve visine koje ne pripadaju skupu *visoka voda* komplementu pripadaju mjerom 1; sve visine koje skupu *visoka voda* apsolutno pripadaju, komplementu pripadaju mjerom 0. Zanimljiv dio je onaj između, gdje se lijepo vidi da što je veća mjera kojom element pripada skupu *visoka voda*, to je manja mjera u kojoj pripada njegovom komplementu.



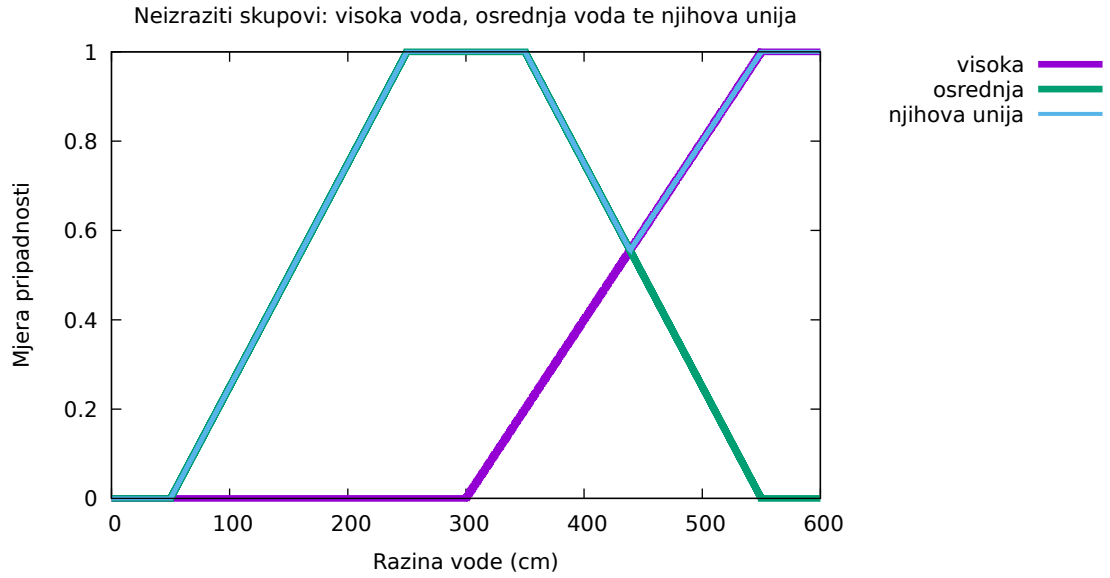
Slika 3.6: Neizraziti skup i njegov komplement prema Zadehovoj definiciji.

Slika 3.7 prikazuje neizrazite skupove *Visoka voda*, *Osrednja voda* te njihov presjek prema Zadehovoj definiciji. Uočite: ako je mjera kojom element pripada neizrazitom skupu *Visoka voda* jednaka 0, ili mjera kojom element pripada neizrazitom skupu *Osrednja voda* jednaka 0, tada je i mjera kojom taj element pripada presjeku jednaka 0.

Slika 3.8 prikazuje neizrazite skupove *Visoka voda*, *Osrednja voda* te njihovu uniju prema Zadehovoj definiciji. Uočite: ako je mjera kojom element pripada neizrazitom skupu *Visoka voda* jednaka 1, ili mjera kojom element pripada neizrazitom skupu *Osrednja voda* jednaka 1, tada je i mjera kojom taj element pripada uniji jednaka 1.



Slika 3.7: Neizraziti skupovi *Visoka voda*, *Osrednja voda* te njihov presjek prema Zadehovoj definiciji.



Slika 3.8: Neizraziti skupovi *Visoka voda*, *Osrednja voda* te njihova unija prema Zadehovoj definiciji.

3.5.1 Razlika između klasične i teorije neizrazitih skupova

Kada govorimo općenito o teoriji skupova, uz načine na koje definiramo skupove razmatramo i aksiome te iz njih izvedene teoreme. S obzirom da smo na prijelazu iz klasične teorije skupova u teoriju neizrazitih skupova napravili određena proširenja, postavlja se pitanje: vrijede li svi teoremi klasične teorije skupova i u teoriji neizrazitih skupova?

Odgovor na ovo pitanje je u većini slučajeva potvrdan. Uobičajeni zakoni poput komutativnosti

i distributivnosti vrijede. Ako se pažljivo definiraju operatori komplementa, unije i presjeka, tada će vrijediti i DeMorganovi zakoni (ovo je, primjerice, ispunjeno za Zadehove definicije navedenih operatora). Međutim, postoje dva zakona koja **ne vrijede**: to su zakon isključenja trećega te zakon kontradikcije.

Činjenicu da zakon isključenja trećega te zakon kontradikcije ne vrijede, najlakše ćemo ilustrirati ako nacrtamo funkcije pripadnosti nekog neizrazitog skupa, njegovog komplementa te zatim njihove unije i presjeka. Krenimo redom.

Slika 3.9 prikazuje neizrazit skup *Visoka voda*, njegov komplement i njihovu uniju prema Zadehovoj definiciji. U klasičnoj teoriji skupova, $A \cup A^C = U$, odnosno unija klasičnog skupa i njegovog komplementa daje čitav univerzalni skup. To bi značilo da i u teoriji neizrazitih skupova očekujemo da vrijedi da svaki element uniji neizrazitog skupa i njegovog komplementa pripada mjerom 1, odnosno da je ta unija jednaka neizrazitom univerzalnom skupu, tj. skupu kojem svi elementi pripadaju mjerom 1. No to očito nije tako - ovaj zakon ne vrijedi. To lijepo možemo vidjeti na primjeru visine 425 cm: ona neizrazitom skupu *Visoka voda* pripada mjerom pripadnosti 0,5, komplementu tog skupa također mjerom pripadnosti 0,5, a time i samoj uniji mjerom pripadnosti 0,5 što nije 1.

Slika 3.9: Neizrazit skup *Visoka voda*, njegov komplement i njihova unija prema Zadehovoj definiciji.

Slika 3.10 prikazuje neizrazit skup *Visoka voda*, njegov komplement i njihov presjek prema Zadehovoj definiciji. U klasičnoj teoriji skupova, $A \cap A^C = \emptyset$, odnosno presjek klasičnog skupa i njegovog komplementa daje prazan skup. To bi značilo da i u teoriji neizrazitih skupova očekujemo da vrijedi da svaki element presjeku neizrazitog skupa i njegovog komplementa pripada mjerom 0, odnosno da je taj presjek jednak neizrazitom praznom skupu, tj. skupu kojem svi elementi pripadaju mjerom 0. No to očito nije tako - niti ovaj zakon ne vrijedi. To lijepo možemo vidjeti na primjeru visine 425 cm: ona neizrazitom skupu *Visoka voda* pripada mjerom pripadnosti 0,5, komplementu tog skupa također mjerom pripadnosti 0,5, a time i samom presjeku mjerom pripadnosti 0,5 što nije 0.

Slika 3.10: Neizrazit skup *Visoka voda*, njegov komplement i njihov presjek prema Zadehovoj definiciji.

3.6 Zaključivanje u neizrazitoj logici

U klasičnoj logici, zaključivanje smo radili koristeći različita pravila. Jedno od uobičajenih bilo je pravilo *Modus ponens* koje govori:

A
$A \to B$

B

U neizrazitoj logici koristimo *Generalizirani modus ponens*:

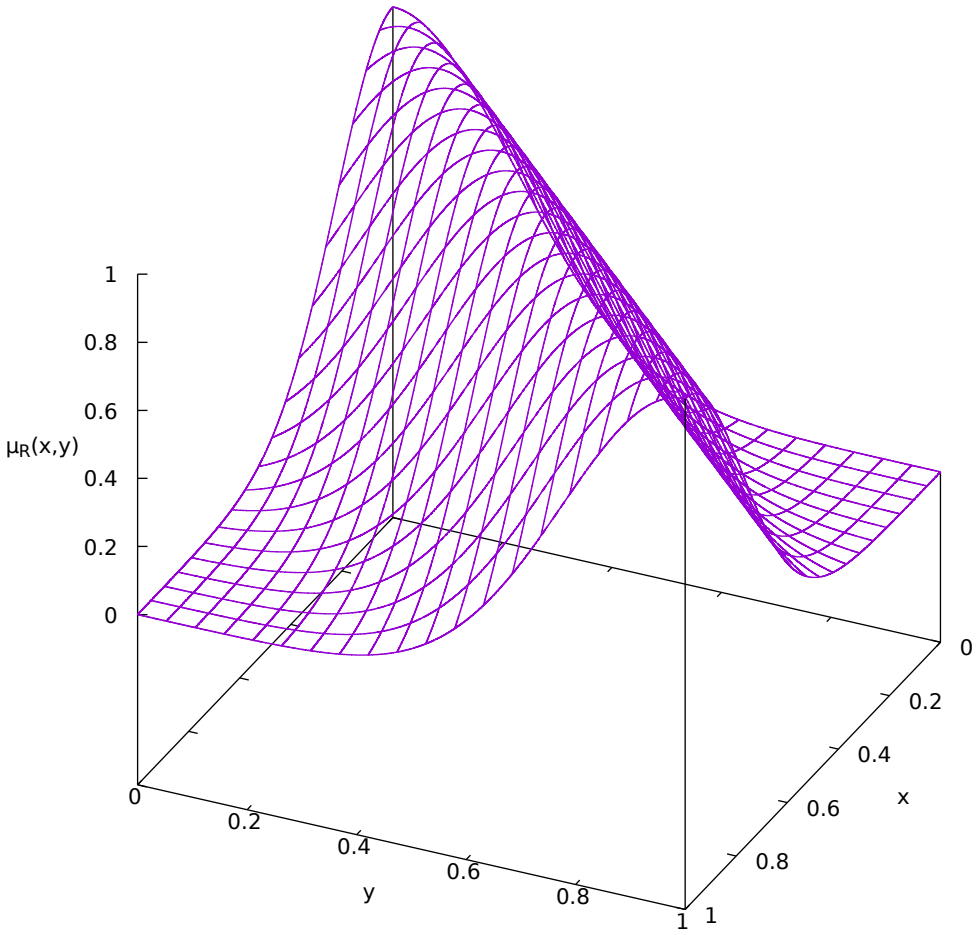
A^*
$A \to B$

B^*

Primjerice, neka imamo pravilo: ako x je mali, onda y je mali. I sada, ako imamo činjenicu da je x mali, na temelju pravila *Modus ponens* možemo zaključiti da je y mali. Međutim, što ako znamo nešto drugo? Primjerice, da je x vrlo mali? Pravilo *Modus ponens* ovdje nam ne pomaže. No *Generalizirani modus ponens* sada nam omogućava da izvedemo da je y vrlo mali. Naime, promotrite kako je dan *Generalizirani modus ponens*: kaže, pretpostavimo da imamo implikaciju $A \to B$, te da imamo činjenicu A^*, a ne nužno baš A. Tada možemo zaključiti da će vrijediti B^*.

Provođenje zaključivanja pravilom generaliziranog modus ponensa matematički ćemo obavljati koristeći matričnu notaciju za zapisivanje neizrazitih skupova te neizrazitih relacija. Pojam neizrazite relacije trebat će nam zbog zapisa implikacije. Naime, implikaciju $A \to B$ možemo promatrati kao binarni operator: ako znamo mjeru istinitosti kojom vrijedi A (prvi podatak) i znamo mjeru istinitosti kojom vrijedi B (drugi podatak), zanima nas kolika je mjera istinitosti formule $A \to B$. Iz ovoga slijedi da djelovanje implikacije možemo lijepo prikazati 2D-matricom. U kontekstu teorije neizrazitih skupova, po retcima će biti elementi domene nad kojom je definiran A, po stupcima elementi domene nad kojima je definiran B. Element na poziciji (x,y) sadrži mjeru istinitosti implikacije da x implicira y.

Kako bismo pojasnili o čemu se radi, evo primjera.



Slika 3.11: Neizrazita relacija "približno jednako" definirana nad $[0,1] \times [0,1]$.

Slika 3.11 prikazuje relaciju *približno jednako*, odnosno daje grafički prikaz mjere istinitosti ovisno o x i y. Primijetimo: kada je $x = y$ (dijagonala), mjera pripadnosti je 1. Što se više udaljavamo od dijagonale, odnosno što je veća razlika između x i y, to mjera pripadnosti para (x,y) neizrazitoj relaciji opada. Ovdje prikazana relacija definirana je nad kartezijem produktom podskupova realnih brojeva pa je vizualno ilustrirana površinom.

Za potrebe računanja, koristit ćemo diskretizirane prostore, pa ćemo neizrazite relacije zapisivati matrično. Primjerice, binarnu neizrazitu relaciju *približno jednako* definiranu nad $\{1,2,3\} \times \{1,2,3\}$ bismo mogli zapisati ovako:

$$\mu_R(x,y) = \begin{bmatrix} 1 & 0.8 & 0.3 \\ 0.8 & 1 & 0.8 \\ 0.3 & 0.8 & 1 \end{bmatrix}$$

Pri tome prvi redak, čitano s lijeva na desno, sadrži vrijednosti $\mu_R(1,1)$, $\mu_R(1,2)$, $\mu_R(1,3)$, drugi

redak vrijednosti $\mu_R(2,1)$, $\mu_R(2,2)$, $\mu_R(2,3)$ i treći redak vrijednosti $\mu_R(3,1)$, $\mu_R(3,2)$, $\mu_R(3,3)$. Vidimo da su elementi na dijagonali jednaki 1, a što se više odmičemo od dijagonale, mjera pripadnosti pada.

Definirajmo sada nad univerzalnim skupom $\{1,2,3\}$ neizraziti skup A koji opisuje koncept "Mali broj", na sljedeći način: $\mu_A(1) = 1$, $\mu_A(2) = 0.5$, $\mu_A(3) = 0.1$.

Notacija. Neizrazite skupove često zapisujemo notacijom:

$$A = \left\{ \frac{\mu_A(e_1)}{e_1} + \frac{\mu_A(e_2)}{e_2} + \frac{\mu_A(e_3)}{e_3} + \cdots \right\}$$

gdje su e_1, e_2, e_3, ... elementi univerzalnog skupa. Prikazani zapis vizualno podsjeća na sumu razlomaka, ali "razlomke" ne treba gledati kao razlomke, već isključivo na način zapisa dviju informacija: mjere pripadnosti elementa (brojnik) i oznake samog elementa (nazivnik). Ako se u zapisu neizrazitog skupa neki element univerzalnog skupa ne pojavljuje, tada se podrazumijeva da je njegova mjera pripadnosti neizrazitom skupu jednaka 0.

Uz opisanu notaciju, naš neizraziti skup "Mali broj" zapisali bismo ovako:

$$A = \left\{ \frac{1}{1} + \frac{0.5}{2} + \frac{0.1}{3} \right\}$$

U matričnom obliku, neizraziti skup ćemo zapisati kao jednoretčanu matricu, pri čemu navodimo samo mjere pripadnosti i podrazumijevamo da one slijede redoslijed kojim i na svim ostalim mjestima nižemo elemente univerzalnog skupa. U tom smislu, naš ćemo neizraziti skup zapisati ovako:

$$[1 \quad 0.5 \quad 0.1]$$

I sada smo konačno spremni obaviti postupak zaključivanja generaliziranim modus ponensom. Pretpostavimo da imamo implikaciju koja govori da su x i y približno jednaki - ona je predstavljena neizrazitom relacijom čiji smo matrični oblik već prikazali. Pretpostavimo da znamo da je A^* upravo naš "mali broj". Zanima nas kakav je onda zaključak, tj. kakav je B^*. Zaključivanje se radi provedbom postupka *kompozicije* neizrazitog skupa i relacije. Kompoziciju označavamo znakom kružića. Konkretno, trebamo izračunati:

$$B^* = [1 \quad 0.5 \quad 0.1] \circ \begin{bmatrix} 1 & 0.8 & 0.3 \\ 0.8 & 1 & 0.8 \\ 0.3 & 0.8 & 1 \end{bmatrix}$$

Razlog zbog kojeg se koristi matrični prikaz jest činjenica da ćemo sada napraviti postupak koji je vrlo sličan postupku množenja dviju matrica koji smo odavno naučili. "Množit ćemo redak sa stupcem" i tako izgraditi novu matricu. Kako je lijeva matrica dimenzija 1×3, a desna dimenzija 3×3, rezultat će ponovno biti matrica dimenzija 1×3. Pri tome, kad god bismo u postupku množenja retka sa stupcem trebali pomnožiti dva broja, mi ćemo umjesto toga izračunati njihov minimum; kad god bismo trebali pozbrajati dva ili više broja, mi ćemo izračunati njihov maksimum. Takav postupak naziva se *max-min kompozicija*.

Idemo provesti taj postupak. Najprije ćemo "pomnožiti" lijevu matricu (jedini redak) s prvim stupcem desne matrice, odnosno $[1 \quad 0.5 \quad 0.1]$ i $[1 \quad 0.8 \quad 0.3]$. Računamo:

$$\max(\min(1,1), \min(0.5,0.8), \min(0.1,0.3)) = \max(1, 0.5, 0.1) = 1$$

Stoga je prvi element rezultantne matrice jednak 1, odnosno za sada je rezultat: $[1 \quad _ \quad _]$

Potom računamo sljedeći element kao "umnožak" lijeve matrice i drugog stupca desne matrice odnosno $[1 \quad 0.5 \quad 0.1]$ i $[0.8 \quad 1 \quad 0.8]$. Računamo:

$$\max(\min(1,0.8),\min(0.5,1),\min(0.1,0.8)) = \max(0.8,0.5,0.1) = 0.8$$

Stoga je drugi element rezultantne matrice jednak 0.8, odnosno za sada je rezultat: $[1 \quad 0.8 \quad _]$

Konačno, računamo i posljednji element kao "umnožak" lijeve matrice i trećeg stupca desne matrice odnosno $[1 \quad 0.5 \quad 0.1]$ i $[0.3 \quad 0.8 \quad 0.1]$. Računamo:

$$\max(\min(1,0.3),\min(0.5,0.8),\min(0.1,0.1)) = \max(0.3,0.5,0.1) = 0.5$$

Stoga je posljednji element rezultantne matrice jednak 0.5, odnosno: $[1 \quad 0.8 \quad 0.5]$. Time smo odredili i konačan rezultat:

$$B^* = [1 \quad 0.8 \quad 0.5] = \left\{ \frac{1}{1} + \frac{0.8}{2} + \frac{0.5}{3} \right\}$$

Usporedimo li sada ulazni neizraziti skup:

$$A = \left\{ \frac{1}{1} + \frac{0.5}{2} + \frac{0.1}{3} \right\}$$

i dobiveni neizraziti skup u zaključku:

$$B = \left\{ \frac{1}{1} + \frac{0.8}{2} + \frac{0.5}{3} \right\}$$

možemo li nekako interpretirati rezultat? Izvedeni neizraziti skup mogli bismo jezično aproksimirati izrazom "manje ili više malen broj", odnsno relaksacijom koncepta "malen broj". Što svakako ima smisla uzevši u obzir da smo kao implikaciju koristili relaciju koja modelira da su x i y približno jednaki.

Pitanje na koje do sada još nismo odgovorili jest kako se iz implikacije može izgraditi neizrazita relacija. Kao što je to bio slučaj i s definicijama komplementa, unije i presjeka, neizrazitu relaciju koja predstavlja implikaciju možemo izgraditi na beskonačno mnogo načina. Mi ćemo se ovdje osvrnuti na najjednostavniji i to ćemo ilustrirati na primjeru.

Želimo modelirati implikaciju koja kaže: ako x je "mali broj" onda y je "veliki broj", odnosno općenito koja modelira $A \to B$. Da bismo to mogli, trebamo imati neizrazite skupove koji modeliraju koncepte "mali broj" i "veliki broj". Pa neka su to redom:

$$\text{mali broj} = \left\{ \frac{1}{1} + \frac{0.5}{2} + \frac{0.1}{3} \right\}$$

$$\text{veliki broj} = \left\{ \frac{0.1}{1} + \frac{0.5}{2} + \frac{1}{3} \right\}$$

Tada ćemo mjeru pripadnosti para (x,y) neizrazitoj relaciji koja odgovara modeliranoj implikaciji odrediti kao

$$\mu_R(x,y) = \min(\mu_A(x), \mu_B(y)).$$

Kako su naši A i B definirani nad $U = \{1,2,3\}$, rezultatna relacija će biti 3×3. U prvom retku ćemo imati s lijeva na desno:

$$\mu_R(1,1) = \min(\mu_A(1), \mu_B(1)) = \min(1,0.1) = 0.1$$
$$\mu_R(1,2) = \min(\mu_A(1), \mu_B(2)) = \min(1,0.5) = 0.5$$
$$\mu_R(1,3) = \min(\mu_A(1), \mu_B(3)) = \min(1,1) = 1$$

Odnosno naša neizrazita relacija izgledat će:

$$\begin{bmatrix} 0.1 & 0.5 & 1 \\ - & - & - \\ - & - & - \end{bmatrix}$$

U drugom retku ćemo imati s lijeva na desno:

$$\mu_R(2,1) = \min(\mu_A(2), \mu_B(1)) = \min(0.5, 0.1) = 0.1$$
$$\mu_R(2,2) = \min(\mu_A(2), \mu_B(2)) = \min(0.5, 0.5) = 0.5$$
$$\mu_R(2,3) = \min(\mu_A(2), \mu_B(3)) = \min(0.5, 1) = 0.5$$

Odnosno naša neizrazita relacija izgledat će:

$$\begin{bmatrix} 0.1 & 0.5 & 1 \\ 0.1 & 0.5 & 0.5 \\ - & - & - \end{bmatrix}$$

Konačno, u trećem retku ćemo imati s lijeva na desno:

$$\mu_R(3,1) = \min(\mu_A(3), \mu_B(1)) = \min(0.1, 0.1) = 0.1$$
$$\mu_R(3,2) = \min(\mu_A(3), \mu_B(2)) = \min(0.1, 0.5) = 0.1$$
$$\mu_R(3,3) = \min(\mu_A(3), \mu_B(3)) = \min(0.1, 1) = 0.1$$

Odnosno konačan zapis neizrazite relacije time je:

$$\begin{bmatrix} 0.1 & 0.5 & 1 \\ 0.1 & 0.5 & 0.5 \\ 0.1 & 0.1 & 0.1 \end{bmatrix}.$$

Primijetite kako dobiveni rezultat zapravo ima smisla. Elementi domene antecedenta implikacije rastu odozgo prema dolje; prvi redak predstavlja najmanji element domene antecedenta, a posljednji redak najveći element domene antecedenta. Time su gore mali brojevi a dolje veći brojevi. S druge strane, elementi domene konsekventa implikacije rastu s lijeva prema desno; prvi stupac predstavlja najmanji element domene konsekventa, a posljednji stupac najveći element domene konsekventa. Stoga je područje malog ulaza, a velikog izlaza u relaciji njezin gornji desni dio. I doista, tamo su mjere pripadnosti visoke, a što se više udaljavamo od tog ugla matrice, mjere propadnosti (odnosno mjere kompatibilnosti s modeliranim konceptom) padaju.

Ovime završavamo osnovni uvod u teoriju neizrazitih skupova te neizrazitu logiku. Bude li Vas o ovoj temi interesiralo nešto više, na kolegijima koji slijede bit će prilike da proširite ovdje izloženo gradivo.

Bibliografija

Knjige

Članci

Konferencijski radovi i ostalo